



ISSN 1311-0829

**ГОДИШНИК НА ТЕХНИЧЕСКИ
УНИВЕРСИТЕТ-СОФИЯ**
том 68, книга 3, 2018



**PROCEEDINGS OF TECHNICAL
UNIVERSITY OF SOFIA**
Volume 68, Issue 3, 2018

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

главен редактор

проф. дтн Емил НИКОЛОВ

зам. главен редактор

проф. дтн Елена ШОЙКОВА

членове

проф. дтн Георги ПОПОВ

проф. дтн Иван КОРОБКО

проф. дфн Иван УЗУНОВ

проф. дтн Иван ЯЧЕВ

проф. дтн Кети ПЕЕВА

проф. дтн Ганчо БОЖИЛОВ

проф. дтн Евелина ПЕНЧЕВА

проф. д.и.н. Младен ВЕЛЕВ

проф. д-р Бончо БОНЕВ

проф. д-р Иво МАЛАКОВ

проф. д-р Огнян НАКОВ

секретар-организатор

инж. Мая СТОЙЧЕВА

EDITORIAL BOARD

Editor -in -Chief

Prof. D.Sc. Emil NIKOLOV

Editor -in -Vice -Chief

Prof. D.Sc. Elena SHOYKOVA

Editors

Prof. D.Sc. Georgi POPOV

Prof. D.Sc. Ivan KOROBKO

Prof. D.Sc. Ivan UZUNOV

Prof. D.Sc. Ivan YACHEV

Prof. D.Sc. Ketii PEEVA

Prof. D.Sc. Gantcho BOJILOV

Prof. D.Sc. Evelina PENCHEVA

Prof. D.Sc. Mladen VELEV

Prof. Ph.D. Boncho BONEV

Prof. Ph.D. Ivo MALAKOV

Prof. Ph.D. Ognyan NAKOV

Organizing Secretary

Eng. Maya STOYCHEVA

Технически университет-София
София 1000, бул. "Кл. Охридски" 8
България <http://tu-sofia.bg>

Technical University of Sofia
Sofia, 1000, boul. Kliment Ohridski 8
Bulgaria <http://tu-sofia.bg>



© Технически Университет-София
© Technical University of Sofia
All rights reserved

ISSN 1311-0829

СЪДЪРЖАНИЕ том 68, книга 3

1.	Деница Кирева-Михова	9
	<i>Облачни изчисления в мрежата за радиодостъп: характеристики и технологии за реализиране</i>	
2.	Деница Кирева-Михова	19
	<i>Облачни технологии в мобилни мрежи</i>	
3.	Емил Соколов	29
	<i>Параметри на синхронен двигател с вътрешни постоянни магнити</i>	
4.	Радослав Цветков	37
	<i>Някои уравнения и неравенства, включващи прости числа</i>	
5.	Емил Николов	47
	<i>Clegg-Оператори за интегриране и диференциране. Обобщено Reset-управление - част 1</i>	
6.	Емил Николов	57
	<i>Clegg-оператори за интегриране и диференциране. Обобщено Reset-управление - част 2</i>	
7.	Борис Грасиани, Александър Маринчев	65
	<i>Моделиране и изследване на ротационен пневматичен изпълнителен механизъм</i>	
8.	Стоян Димитров	75
	<i>Йорданови диференцирания в пръстени и полупръстени II</i>	
9.	Димитринка Владева	85
	<i>Проекции върху десни идеали на полупръстен от ендоморфизми на безкрайна верига</i>	
10.	Димитринка Владева	95
	<i>Проекции върху леви идеали на полупръстен от ендоморфизми на безкрайна верига. Йорданови умножения</i>	
11.	Нина Г. Николова	105
	<i>Изследване на някои възможности за модифициране на репетитивни PI-PID алгоритми за управление</i>	
12.	Владимир Христов, Стоян Дурчев	113
	<i>Следене на траектория от мобилен робот ZUMO</i>	
13.	Цоньо Славов, Мирослава Барахарска	121
	<i>Каскадно линейно квадратично управление на нивото на флуид в резервоар</i>	
14.	Алексей Николов	131
	<i>Точно представяне на особеностите на решенията на една гранична задача за четиримерното вълново уравнение</i>	

CONTENTS Volume 68, Issue 3

1.	Denitsa Kireva-Mihova.....	9
	<i>Multi-Access Edge Computing: Technologies for Implementation</i>	
2.	Denitsa Kireva-Mihova.....	19
	<i>Cloud Technologies in Mobile Network</i>	
3.	Emil Sokolov.....	29
	<i>Parameters of Interior Permanent Magnet Synchronous Motor</i>	
4.	Radoslav Tzvetkov.....	37
	<i>On Some Equations and Inequations Involving Primes</i>	
5.	Emil Nikolov.....	47
	<i>Clegg-Operators for Integration and Differentiation. Generalized Reset-Control - part 1</i>	
6.	Emil Nikolov.....	57
	<i>Clegg-Operators for Integration and Differentiation. Generalized Reset-Control - part 2</i>	
7.	Boris Grasiani, Alexander Marinchev.....	65
	<i>Modeling and Study of Rotary Pneumatic Actuator</i>	
8.	Stoyan Dimitrov.....	75
	<i>Jordan Derivations on Rings and Semirings II</i>	
9.	Dimitrinka Vladeva.....	85
	<i>Projections on Right Ideals of Endomorphism Semiring of an Infinite Chain</i>	
10.	Dimitrinka Vladeva.....	95
	<i>Projections on Left Ideals of Endomorphism Semiring of an Infinite Chain. Jordan Multiplications</i>	
11.	Nina G. Nikolova.....	105
	<i>Examination of Certain Modification Options on Modified Repetitive PI-PID Control Algorithms</i>	
12.	Vladimir Hristov, Stoyan Durchev.....	113
	<i>Traceability Tracking of Mobile Robot ZUMO</i>	
13.	Tsonyo Slavov, Miroslava Baraharska.....	121
	<i>Cascade LQG Control of Fluid Level in Tank</i>	
14.	Alexey Nikolov.....	131
	<i>Exact Representation of the Singularities of the Solutions of a Boundary Value Problem for the Four-Dimensional Wave Equation</i>	

Author's Index - Volume 68, Issue 3

	<i>author</i>	<i>article</i>
1.	Alexander Marinchev	65
2.	Alexey Nikolov	131
3.	Boris Grasiani	65
4.	Denitsa Kireva-Mihova	9, 19
5.	Dimitrinka Vladeva	85, 95
6.	Emil Nikolov	47, 57
7.	Emil Sokolov	29
8.	Miroslava Baraharska	121
9.	Nina G. Nikolova	105
10.	Radoslav Tzvetkov	37
11.	Stoyan Dimitrov	75
12.	Stoyan Durchev	113
13.	Tsonyo Slavov	121
14.	Vladimir Hristov	113

PROCEEDINGS OF TECHNICAL UNIVERSITY OF SOFIA

Volume 67 Issue 3 (2018)

pages

138

articles

14

authors

14

ОБЛАЧНИ ИЗЧИСЛЕНИЯ В МРЕЖАТА ЗА РАДИОДОСТЪП: ХАРАКТЕРИСТИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ЗА РЕАЛИЗИРАНЕ

Деница Кирева-Михова

Резюме: Концепцията за облачни изчисления в края на мобилната мрежа (Multi-access Edge Computing – MEC) децентрализира облачните функции за съхранение и обработка по-близо до крайния потребител, като по този начин прави възможно разгръщането на приложения с изисквания за работа в реално време и голяма честотна лента. В тази статия са анализирани технологиите, които могат да се използват за реализирането на тази концепция. Клетъчна система, която предлага MEC услуги, разчита на облачни изчисления, виртуализация на мрежови функции, софтуерно дефинирани мрежи и мрежово сегментиране.

Ключови думи: Cloud Computing, Software-defined Networking, Network Function Virtualization, Network slicing

MULTI-ACCESS EDGE COMPUTING: TECHNOLOGIES FOR IMPLEMENTATION

Denitsa Kireva-Mihova

Abstract: The Multi-Access Edge Computing (MEC) concept decentralizes storage and processing capabilities of the cloud near to the end user, enabling deployments of applications with real-time, and high bandwidth requirements. This paper analyzes the technologies that can be used to implement the MEC concept. A cellular system that offers MEC services relies on cloud computing, network function virtualization, software-defined networking, and network slicing.

Key words: Cloud Computing, Software-defined Networking, Network Function Virtualization, Network slicing

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Нарастващи изисквания към услугите за обработка на данни понастоящем създават предизвикателства както за доставчиците на услуги, така и за операторите на мобилни мрежи. Визията на бъдещите 5G системи е да осигурят персонализирани и центрирани около потребителите услуги на достъпна цена, която да позволява съобразени с контекста и близостта услуги, предоставяне на услуги в гъсто населени райони и в движение, и усъвършенствани мултимедийни услуги. Такава нововъзникваща 5G екосистема ще обхване хетерогенна комуникационна среда, включваща мрежови ресурси и информационни технологии (IT) с услуги, осигуряващи облак, чрез средствата на виртуализация и

софтуеризация [1], [2]. Иновативните, ориентирани към услуги, облачни архитектури в края на мобилната мрежа ще подготвят пътя за подобро качество на възприятие, докато виртуализацията на мрежата ще бъде катализатор за поддържането на множество услуги и намалена латентност, което ще увеличи ефективността на мрежата и предоставянето на услуги.

Multi-access Edge Computing (MEC) разпределя възможностите за изчисления, обработка и съхранение на централизираните облаци в края на мобилната мрежа. Целта е да създаде отворена среда в облачните платформи с множество доставчици, разположени в края на мрежата за радиодостъп, достъпни за доставчици на приложения/услуги и трета страна в опит да се преодолеят предизвикателствата, свързани с централизираните среди на изчислителните облаци по отношение на латентността и осигуряването на по-високи скорости [3]. Чрез изместване на интензивни задачи към края на мобилната мрежа и локално обработване на данни в близост до потребителите мобилните мрежови оператори могат да намалят претоварванията в опорната мрежа и мрежата за достъп, като същевременно подпомагат разтоварването на тежки изчислителни задачи от потребителското оборудване (UE) с ограничено захранване до края на мобилната мрежа. Такава децентрализирана облачна архитектура представлява ключова технология за нововъзникващите 5G системи, която трансформира старите мобилни базови станции, като предлага възможности на изчислителни облаци и среда за IT услуги в края на мрежата.

В тази статия е направен преглед на ключовите технологии за реализиране на MEC.

2. ОБЛАЧНИ ИЗЧИСЛЕНИЯ, ВИРТУАЛНИ МАШИНИ И КОНТЕЙНЕРИ

MEC разчита на технологиите за облачни изчисления и виртуализация, включително виртуални машини и контейнери. Клетъчна система, която предлага MEC услуги, се основава на NFV, SDN и мрежови атрибути, които позволяват гъвкавост [4], [5].

Облачните изчисления намаляват разходите за управление на софтуера и хардуера, като същевременно позволяват висока изчислителна мощност и висока производителност, достъпност и постоянна наличност. Те осигуряват общ ресурс, който може да бъде мащабиран динамично. Облачните изчисления са в процес на зрялост, като предоставят четири различни технологични модела и три модела на услуги [6], включително:

- Технологични модели: (а) Частен облак, който изцяло се притежава и поддържа от предприятие в рамките на корпоративната защитна стена, осигуряващ сигурност чрез предоставяне на специален достъп (напр. RackSpace, Citrix и Google); (б) Публичен облак - публично достъпен резерв от ресурси, осигурен от доставчик на облак (e.g., Amazon, Microsoft, and Dell), (в) Хибриден облак - комбинация от публичен и частен облак (напр. VMWare, HP, и IBM) и (г) Обществен облак - общ ресурс, който се състои от агрегация на няколко доставчици, които могат да бъдат споделени от определена група потребители.

- Модели на обслужване: (а) IaaS (Infrastructure-as-a-service) предлага виртуализирана мащабируема компютърна инфраструктура от гледна точка на изчисляване, съхранение и работа в мрежа (напр. Amazon EC2 и Azure VMs)-a-service); (б) PaaS (Platform-as-a-service) предлага платформа за разработване, управление и изпълнение на приложения (напр. Azure Websites и Amazon Beanstalk); и (в) SaaS (Software-as-a-service) осигурява достъп до софтуер, (напр. Dropbox и Google docs).

Облачната платформа обикновено се състои от няколко физически машини, които съставят една логическа единица, която може да бъде споделена между различни играчи, изпълняващи отделни изолирани задачи. Един от начините за извършване на такава операция е използването на хипервайзор, който може да създава и изпълнява виртуални машини (VM), които могат да приемат отделни задачи. Свойството изолация на VM предоставя на потребителите независима система, т.е. напълно функционална машина, независимо от основния хардуер. Една VM е абстракция на физически хардуерен стек (т.е. виртуализирана BIOS, мрежови адаптери, хранилище, памет и процесор) и изисква пълно изображение на операционната система, допълнителни библиотеки за хостинг на приложения и услуги. Освен ако приложението или услугата не се нуждаят от подобна среда, VM не използва значителни ресурси, освен бавния стартиращ процес поради зареждането на цялата операционна система [7].

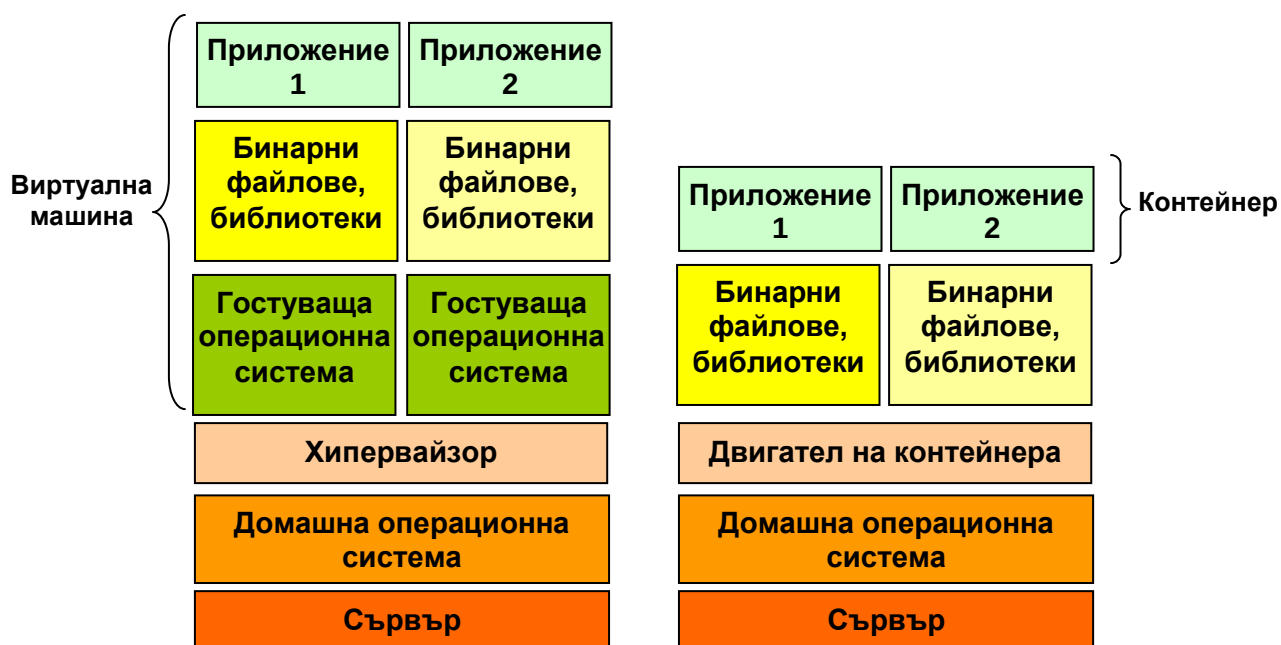
За разлика от това абстракцията в контейнер се осъществява на ниво операционна система, поддържаща програми и библиотеки и системни ресурси за изпълнение на конкретно приложение или услуга. Контейнерите разделят ресурсите на физическите машини, като създават множество изолирани потребителски пространства с много по-малък размер в сравнение с VM. Това позволява на няколко контейнера да работят в рамките на една операционна система, което ускорява внедряването с почти сродна производителност в процесора, паметта, диска и мрежата. Обикновено контейнерът изпълнява приложение или услуга, осигурявайки лесно инициране и бърза миграция, но е по-малко сигурен в сравнение с виртуалните машини, които също могат да работят по-ефективно с множество приложения. На практика контейнерът може да бъде стартиран за няколко милисекунди, докато стартирането на VM ще изисква секунди или минути в зависимост от характеристиките на операционната система, физическия хардуер и натоварването на системата. табл.1.1 изработва разликите между VM и контейнери [8].

Табл.1.1. Качествено сравнение на виртуални машини и контейнери

<i>Виртуална машина</i>	<i>Контейнер</i>
Базирана на хипервайзор виртуализация работи като слой на хардуерна абстракция	Виртуализация на ниво операционна система; работи на слоя от системни извиквания на приложния бинарен интерфейс
Осигурява абстракция за гостуващи операционни системи	Осигурява абстракция директно за гостуващи процеси
Изисква пълна виртуализация на хардуерния стек и следователно е с тежки изисквания	Всички виртуални копия поделят едно ядро на операционната система, следователно е с леки

	изисквания
Бавно обезпечаване (стартиране, миграция)	Бързо мащабируемо обезпечаване
Голяма консумация на ресурси, голям служебен обем	Малка консумация на ресурси, по-мащабируем
Осигурява пълна изолация, следователно е по- сигурна	Изолация на ниво процеси, следователно по- малка сигурност

Архитектурното представяне на VM и контейнери е илюстрирано на фиг.1. Използването на контейнери предлага виртуализация с по-леки изисквания, което позволява преносимо време за изпълнение на МЕС услуги, което е особено полезно за мобилните потребители.



Фиг.1. Архитектурно представяне на виртуални машини и контейнери

Контейнерите осигуряват петкратно предимство пред VM в контекста на МЕС. Първо, контейнерите извършват наслояване на изображения и разширение, за да създават приложения, които след това се съхраняват като изображения в хранилище. Това по-късно става достъпно от контейнера, за да стартира приложението на хоста. Механизмът помага при опаковането, доставката и оркестрирането, което ускорява внедряването. На второ място API на контейнера осигуряват поддръжка за управление на жизнения цикъл, т.е. създаване, дефиниране, композиране, разпространение и пускане в експлоатация на контейнери. На трето място, съхранението се осигурява чрез поставяне на един или повече контейнери за данни с текуща услуга. Четвърто, свързването в мрежа се осъществява чрез проектиране на портове, което улеснява свързването на контейнера. И накрая, подкрепата за архитектурата на микроуслуги (т.е. независими софтуерни компоненти на услуги, от които може бързо да се формира бизнес приложение, базирано на изискванията) улеснява контейнера в облака PaaS. Платформата Docker е най-изявеното решение за контейнери, което улеснява средата за облачни изчисления в края на мрежата. Контейнерите могат да се използват и

като заместител на VM, като се гарантира намалено използване на ресурсите по отношение на съхранението и изчисляването. Освен това Google Kubernetes и Apache Mesos осигуряват управление на клъстер на контейнери в разпределени възли, което позволява по-бързо мащабиране. Въпреки ползите от контейнерите, които са по-очевидни в среда с мобилност на потребителите, VM могат да поддържат по-тежки приложения или пакет от приложения, свързани с трета страна, осигуряващи по-висока степен на сигурност. Ефективността на VM може да бъде от полза за такива случаи, особено когато мобилността на услугата не е необходима, например за разширена реалност, корпоративни и домашни мрежи.

3. ВИРТУАЛИЗАЦИЯ НА МРЕЖОВИТЕ ФУНКЦИИ

Network Function Virtualization (NFV) е технология, която позволява на операторите да разделят мрежовите си функции и услуги (напр. Packet Data Network/Serving Gateway - PDN / S-GW, защитна стена, DNS и кеширане), ускорявайки по този начин скоростта на пускане на пазара [9]. Технологията дефинира нова мрежова архитектура и осигурява внедряване чрез консолидиране на мрежовите функции и услуги в облачните платформи, което позволява спестяване на капиталови и оперативни разходи. Осигурява се гъвкавост както в равнината на данните, така и в равнината на управление чрез увеличаване и намаляване на разпределените ресурси, отразяващи развиващите се изисквания на услугите [11]. По-специално NFV въвежда виртуализирани мрежови функции (VNF), позволяващи колокиране на множество потребителски модели в един и същ хардуер или в същата виртуализирана среда, например VM. VNF могат да се намират в рамките на една VM или могат да бъдат разпределени в множество VM в облачна инфраструктура.

Стандартите за NFV дефинират следните три области:

- VNF, които са версии на мрежови функции за внедряване на софтуер;
- NFV инфраструктура, която съдържа хардуерните и софтуерните компоненти, напр. процесор, памет, слой за виртуализация и т.н., които предлагат мрежова среда, в която са разположени VNF;
- Управление и оркестрация на NFV, която осигурява организацията и управлението на физическите и виртуалните ресурси на NFVI, управление на жизнения цикъл на VNF.

Управлението и оркестрацията на NFV осигурява управление на жизнения цикъл и мениджмънт на неизправности за текущи услуги, например замяната на VM при неизправност и може да бъде отговорен за осигуряването на свързаност в MEC платформите, които обхващат различни места, особено когато NFV е интегрирана със SDN [12]. Динамичните аспекти на NFV, които могат да са от полза за MEC услугите, включват: (а) преносимост, при която независими блокове на всички услуги могат да бъдат преместени в облачната среда на друга мрежа, (б) поддръжка за внедряване на преносими функции върху взаимодействащи географски разпределени виртуални мрежи, (в) разслояване чрез разделя-

не на виртуални мрежови ресурси за конкретни приложения и (г) споделяне на набор от конфигурируеми ресурси за достъп по заявка.

4. СОФТУЕРНО ДЕФИНИРАНИ МРЕЖИ

Software-defined Networking (SDN) е технология, която позволява бързо внедряване на новаторски услуги, което дава възможност за програмируемост на мрежата [13]. SDN може да допълни използването на MEC с предлагане на възможности за програмиране, като същевременно позволява гъвкаво и ефективно управление на услуги. Чрез отделянето на контролната равнина от равнината на данните и чрез използването на общи приложни програмни интерфейси (API) SDN въвежда логически централизиран контрол, който може лесно да създава и предлага виртуални мрежови потребителски модели, като се абстрахира от основната мрежова инфраструктура. В контекста на MEC, SDN контролерът трябва да управлява VNF, VM и контейнери, свързани с MEC, като друг вид ресурс, който може да бъде динамично разпределен и преместен [14]. Следователно SDN може да поддържа гъвкаво свързване на услуги, предлагайки динамично предоставяне на услуги чрез свързване на VNF и MEC услуги, които също могат да се намират на ръба в определен ред, който удовлетворява изискванията за производителност [15] и [16] като позволява на доставчиците на приложения и трети страни да ръководят мрежовата инфраструктура.

В [17] и [18] е дадено изследване, което представя основните идеи за SDN в мобилните мрежи, съсредоточено върху програмируемостта на мрежата, ефективното споделяне на ресурсите и мрежовия контрол в реално време. Технологията на SDN може да даде възможност за лесно и гъвкаво решение за осигуряване на мрежова свързаност и управление на услуги към MEC платформа или между MEC крайни мрежи в хетерогенна радиосреда [19] и различни транспортни мрежи от край до край [20].

SDN преобразува специфичните мрежови комутатори и маршрутизатори, базирани на фърмуер, формирайки равнина на данни, която може да се управлява във входните и изходните точки на мрежата. В мобилните мрежи използването на SDN води до интеграция между отделните слоеве на мобилната и транспортната система [21], напр. чрез актуализиране на таблиците на потоците в комутаторите и маршрутизаторите, без да е необходимо да се пренасочва трафик, като се избягва транслирането на IP адреси и тунелиране [22]. Това е особено полезно за мобилността на потребителите между MEC платформи, където разпределената мобилност в края на мрежата може да използва анализите на мрежата за достъп, като същевременно намалява претоварванията в опорната мрежа [23].

5. МРЕЖОВО СЕГМЕНТИРАНЕ

За да се отговори на разнообразните случаи на използване и бизнес модели за нововъзникващите приложения на мобилния интернет и интернет на нещата, се очакват както революционните архитектури на безжичната мрежа, така и модерните технологии. В резултат на това наскоро се предлага мрежово сегментиране (Network slicing), за да се осигури гъвкаво осигуряване на софт-дефинирана мрежа по икономически ефективен начин. В концепцията на мрежово сегментиране

[24] мрежовата единица е нарязана на множество изолирани мрежови сегменти и всеки сегмент има подходящи мрежови функции и използва усъвършенствани технологии за радиодостъп за конкретен случай на използване или бизнес модел. Чрез изследване на софтуерно дефинирани мрежи и виртуализация на мрежови функции могат да се реализират удобно мрежовите сегменти и изолацията между тях [25].

Сегментирането на мрежата позволява внедряване на множество логически самостоятелни мрежи върху обща физическа инфраструктура, което води до изолиране на ресурсите и персонализирано мрежово функциониране, както е описано подробно в [26]. С други думи, сегментирането на мрежата поддържа гъвкаво осигуряване на мрежови ресурси, както и динамично разпределение на мрежови функции, типове технологии за радиодостъп и приложения, дори и с кратки жизнени цикли, позволяващи нови възможности за създаване на стойност.

Сегментирането на мрежата позволява споделяне на ресурси между виртуални мобилни оператори, услуги и приложения, както е разработено в [27], с отчитане на мобилните 3GPP мрежи и въвеждане на понятието "брокер на мрежови слой", което допълва споделения мениджмънт на мрежата и функцията за излагане на възможности на услуги. От гледна точка на инфраструктурата мрежовото сегментиране разпределя набор от специализирани или споделени ресурси, физически или виртуални, на конкретни страни чрез въвеждане на мрежов хипервайзор. Изследване на различните мрежови хипервайзорни архитектури е представено в [28], което отчита различните варианти на решение за внедряване. За да отговорят на изискванията за обслужване на входящите заявки, мрежовите сегменти трябва да комбинират набор от мрежови и облакови ресурси, включително честотна лента, мрежови функции, както и обработка, съхранение и достъп до големи данни и т.н., които са общи МЕС услуги.

6. КОМУНИКАЦИИ МЕЖДУ УСТРОЙСТВА

Комуникацията между устройства (D2D комуникация) позволява директно предаване между крайните устройства в близост. Тя е призната за една от основните технологии за 5G мрежи. Предимствата от използването на D2D комуникация включват комуникация с един хоп, по-висока спектрална ефективност, ниска предавателна мощност, разширение на обхвата и повторно използване на спектъра. Освен това с помощта на D2D комуникацията, масовите устройства могат да бъдат разтоварени от макробазови станции към малки базови станции, което подобрява общия капацитет на мрежата и предотвратява претоварването [29]. Много изследователски усилия върху D2D комуникацията са фокусирани върху проблемите на повторното използване на радиочестотния спектър, откриването на съответстваща единица, контрола на мощността, създаването на връзки и управлението на смущенията [30]. С концепцията за изчисления в края на мрежата използването на ресурсите за изчисляване и съхранение на голям брой интелигентни устройства привлича вниманието на изследователите. Разтоварването на изчисленията и проблемите със споделянето на съдържание чрез D2D комуникации се изследват в редица работи [31] и [33].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Научните изследвания и стандартизацията, които позволяват ефективни МЕС услуги, все още продължават, като все още предстои да бъдат разгледани различни предизвикателства. Една от ключовите области е разработването на усъвършенствани приложни програмни интерфейси, които ще позволят на трети страни да придобиват и просто, и ефективно да управляват ресурсите на МЕС платформи, включително и съответните модели за данни. Понастоящем стандартизиращите органи все още обсъждат различни приложни програмни интерфейси и модели за данни, като се обмислят нововъзникващи приложения. Тези API също трябва да бъдат подобрени, за да осигурят информация, свързана с мрежата за радиодостъп, което я прави видима за приложенията.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] NGMN 5G White Paper, NGMN Alliance, San Diego, CA, USA, Feb. 2015.
- [2] T. Taleb, B. Mada, M.-I. Corici, A. Nakao, and H. Flinck, "PERMIT: Network slicing for personalized 5G mobile telecommunications," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 55, no. 5, pp. 88–93, May 2017.
- [3] "Mobile edge computing: A key technology towards 5G," White Paper, ETSI, Sophia Antipolis, France, Sep. 2015.
- [4] T. Taleb, B. Mada, M.-I. Corici, A. Nakao, and H. Flinck, "PERMIT: Network slicing for personalized 5G mobile telecommunications," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 55, no. 5, pp. 88–93, May 2017.
- [5] I. Afolabi et al., "Towards 5G network slicing over multipledomains," *IEICE Trans. Commun.* May 2017. [Online]. Available: https://www.jstage.jst.go.jp/article/transcom/advpub/0/advpub_2016NNI0002/_article
- [6] S. K. Garg, S. Versteeg, and R. Buyya, "A framework for ranking of cloud computing services," *Future Gener. Comput. Syst.*, vol. 29, no. 4, pp. 1012–1023, Jun. 2013.
- [7] S. J. Vaughan-Nichols, Containers vs. Virtual Machines: How to Tell Which Is the Right Choice for Your Enterprise, IT-World, Geneva, Switzerland, Apr. 2015
- [8] C. Pahl and B. Lee, "Containers and clusters for edge cloud architectures - A technology review," in *Proc. 3rd IEEE Int. Conf. Future Internet Things Cloud (FiCloud)*, Rome, Italy, Aug. 2015, pp. 379–386.
- [9] R. Mijumbi et al., "Network function virtualization: State-of-the-art and research challenges," *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 18, no. 1, pp. 236–262, 1st Quart., 2016.
- [10] J. G. Herrera and J. F. Botero, "Resource allocation in NFV: A comprehensive survey," *IEEE Trans. Netw. Service Manag.*, vol. 13, no. 3, pp. 518–532, Sep. 2016.
- [11] "Network function virtualization (NFV); ecosystem; report on SDN usage in NFV architecture framework," ETSI, Sophia Antipolis, France, Tech. Rep. ETSI GS NFV-EVE 005, v1.1.1, Dec. 2015.
- [12] "SDN Architecture," ONF, Montreal, QC, Canada, Tech. Rep. TR-521, Feb. 2016.

- [13] W. Xia, Y. Wen, C. H. Foh, D. Niyato, and H. Xie, "A survey on software-defined networking," *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 17, no. 1, pp. 27–51, 1st Quart., 2015.
- [14] J. Costa-Requena et al., "SDN and NFV integration in generalized mobile network architecture," in *Proc. IEEE Eur. Conf. Netw. Commun. (EuCNC)*, Paris, France, Jun. 2015, pp. 154–158.
- [15] Y. Li and M. Chen, "Software-defined network function virtualization: A survey," *IEEE Access*, vol. 3, pp. 2542–2553, Dec. 2015.
- [16] A. M. Medhat et al., "Service function chaining in next generation networks: State of the art and research challenges," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 55, no. 2, pp. 216–223, Feb. 2017.
- [17] M. Yang et al., "Software-defined and virtualized future mobile and wireless networks: A survey," *Mobile Netw. Appl.*, vol. 20, no. 1, pp. 4–18, Feb. 2015.
- [18] X. Jin, L. E. Li, L. Vanbever, and J. Rexford, "SoftCell: Scalable and flexible cellular core network architecture," in *Proc. ACM CoNEXT*, Santa Barbara, CA, USA, Dec. 2013, pp. 163–174.
- [19] C. J. Bernardos et al., "An architecture for software defined wireless networking," *IEEE Wireless Commun. Mag.*, vol. 21, no. 3, pp. 52–61, Jun. 2014.
- [20] A. S. Thyagaturu, A. Mercian, M. P. McGarry, M. Reisslein, and W. Kellerer, "Software defined optical networks (SDONs): A comprehensive survey," *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 18, no. 4, pp. 2738–2786, 4th Quart., 2016.
- [21] K. Pentikousis, Y. Wang, and W. Hu, "MobileFlow: Toward software defined mobile networks," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 51, no. 7, pp. 44–53, Jul. 2013.
- [22] L. Valtulina, M. Karimzadeh, G. Karagiannis, G. Heijenk, and A. Pras, "Performance evaluation of a SDN/OpenFlow-based distributed mobility management (DMM) approach in virtualized LTE systems," in *Proc. IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps)*, Austin, TX, USA, Dec. 2014, pp. 18–23.
- [23] S. Jeon, C. Guimarães, and R. L. Aguiar, "SDN-based mobile networking for cellular operators," in *Proc. 9th ACM Workshop Mobility Evolving Internet Archit. (MobiArch)*, Maui, HI, USA, Sep. 2014, pp. 13–18.
- [24] R. Hattachi and J. Erfanian, 5G white paper, NGMN Alliance, 2015.
- [25] Q. Li, G. Wu, A. Papathanassiou, and U. Mukherjee, "An end-to-end network slicing framework for 5G wireless communication systems, 2016," <https://arxiv.org/abs/1608.00572>
- [26] Description of Network Slicing Concept, P1 WS1 E2E Architecture Team, NGMN Alliance, San Diego, CA, USA, Jan. 2016.
- [27] K. Samdanis, X. Costa-Perez, and V. Sciancalepore, "From network sharing to multi-tenancy: The 5G network slice broker," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 54, no. 7, pp. 32–39, Jul. 2016.
- [28] A. Blenk, A. Basta, M. Reisslein, and W. Kellerer, "Survey on network virtualization hypervisors for software defined networking," *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 18, no. 1, pp. 655–685, 1st Quart., 2016.
- [29] W. Cao; G. Feng; S. Qin; M. Yan, "Cellular Offloading in Heterogeneous Mobile Networks with D2D Communication Assistance," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1.

- [30] A. Laya, K. Wang, A. A. Widaa, J. Alonso-Zarate, J. Markendahl and L. Alonso, "Device-to-device communications and small cells: enabling spectrum reuse for dense networks," *IEEE Wireless Communications*, vol. 21, no. 4, pp. 98-105, Aug. 2014.
- [31] B. Bai, L. Wang, Z. Han, W. Chen and T. Svensson, "Caching based socially-aware D2D communications in wireless content delivery networks: a hypergraph framework," *IEEE Wireless Communications*, vol. 23, no. 4, pp. 74-81, Aug. 2016.
- [32] B. Chen, C. Yang and G. Wang, "Cooperative Device-to-Device Communications with Caching," in *2016 IEEE 83rd Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*, Nanjing, 2016, pp. 1-5.

Автор: Деница Кирева-Михова, ас. инж., катедра „Технологии и мениджмънт на комуникационни системи”, Факултет по телекомуникации, Технически Университет-София; E-mail address: kireva@tu-sofia.bg

Постъпила на 30.01.2018 г.

Рецензент: доц. д-р Венцеслав Трифонов

ОБЛАЧНИ ТЕХНОЛОГИИ В МОБИЛНИ МРЕЖИ

Деница Кирева-Михова

Резюме: През последните десетилетия изчислителните облаци са се развили в значителна степен и намират широко приложение поради високата ефективност и гъвкавост, като предлагат централизирани функции за изчисляване, съхранение и управление на мрежата. С появата на много нови ширококолентови приложения съществуващата централизирана облачна архитектура среща сериозни предизвикателства. В статията е направен преглед на облачните технологии в мобилни мрежи, които са създадени с цел да посрещнат изискванията за капацитет и латентност.

Ключови думи: мобилни облачни изчисления. изчисления в мъгла, изчисления в края на мобилната мрежа

CLOUD TECHNOLOGIES IN MOBILE NETWORKS

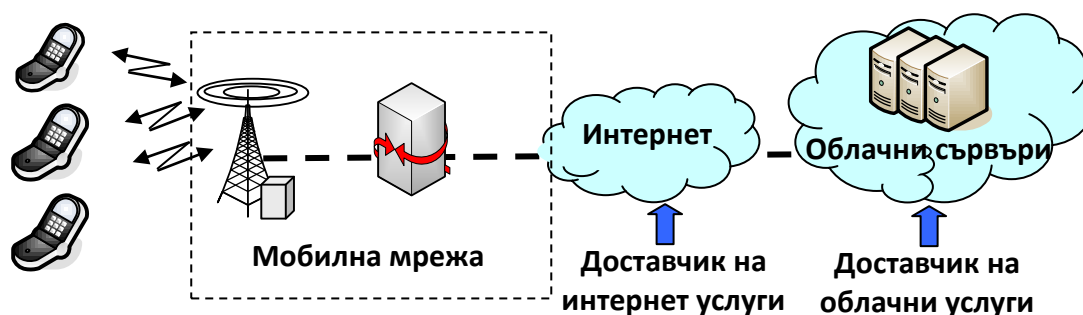
Denitsa Kireva-Mihova

Abstract: Over the last decades cloud computing has evolved to a considerable extent and it is widely used due to its high efficiency and flexibility by offering centralized network computing, storage and management functions. The emergence of many new broadband applications with low latency requirements is a serious challenge for the existing centralized cloud architecture. This article reviews cloud technologies in mobile networks that are designed to meet capacity and latency requirements.

Key words: Mobile Cloud Computing, Fog Computing, Multi-access Edge Computing

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Терминът "облак" е използван за представяне на съвкупност от сървъри с изчислителни и информационни ресурси, което води до изследване на мобилните облачни изчисления (Mobile Cloud Computing - MCC). Мобилните облачни изчисления отчитат различни фактори, свързани с мобилните устройства, в сравнение с традиционните изчислителни техники за разтоварване, като енергията на устройството, разходите за използване на честотната лента, мрежовата свързаност, мобилността, информация за контекста и местоположението [1]. Публикувани са множество изследвания, фокусирани върху различни аспекти на MCC. В [2] и [3] авторите представят общи въпроси за MCC включително архитектура, технически предизвикателства и приложения. В [4] са обсъдени съществуващите работи по платформите за мобилни облаци и схемите за достъп.



Фиг.1. Мобилни облачни изчисления

МСС се разглежда като разширяване на функциите на изчислителните облаци, т.е. адаптивност, мащабируемост, наличност и самосъзнание в мобилна компютърна среда [5], [6]. От гледна точка на мрежовата архитектура МСС действа като инфраструктура за услуга за съхранение и обработка на данни извън мобилните устройства, както се счита от Dinh и колектив [7], подобрявайки по този начин ресурсните възможности на мобилните устройства.

МСС улеснява лесното разработване на нови приложения и услуги, например мобилно обучение [8], мобилни игри [9] и мобилно здравеопазване [10], което може да превърне потребителското оборудване (UE) в инструмент за учене, забавление, социални мрежи, актуализиране на новини и бизнес. Въпреки това потенциално използване, публичните облаци не успяха да изпълнят изискванията за латентност, дължащи се на дългите времена за реагиране, което на свой ред се дължи на централизирания модел на архитектурата в облака, който оказва влияние върху качеството на възприятие (QoE) за крайните потребители. Отчитайки тези слабости, концепцията за облак в края на мрежата е представена първоначално под формата на облачета (Cloudlets), които помагат на потребителското оборудване при обработка и съхранение и които по-късно проправят пътя към по-сложните концепции за изчисления в мъгла и изчисления в края на мобилната мрежа. И двете концепции предвиждат открита платформа, предлагаща подобен тип функции. Изграждането на мъгла се съсредоточава върху приложения, главно Интернет на нещата (IoT), които използват платформа, колективно съдействаща на UE. От друга страна, MEC се фокусира върху подобренията, свързани с приложенията по отношение на механизмите за обратна връзка, обработката и съхранението на информация и съдържание.

2. ОБЛАЧЕТА

В [11] и [12], Satyanarayan и колектив въвеждат понятието за облачета (Cloudlet) като среден слой в тристепенна архитектура, състояща се от крайно устройство, платформа за облак в края на мрежата, т.е. Cloudlet и централизиран център за данни. Целта на облачетата е да разшири отдалечените услуги на център за данни в непосредствена близост до крайните потребители. Облачетата се разглеждат като надежден възел с богати ресурси и стабилна Интернет свързаност, предлагащ на близките мобилни устройства изчисления и ресурси за достъп и съхранение. Идеята е да се разгърнат като възел за крайни облачни изчисления на обществени места например кафенета и търговски центрове, както и гъсто населени места например гари и изложбени зали

Облачетата се създават въз основа на виртуални машини (VM). Те действат като микроцентрове за данни, като предлагат достъп на крайните потребители през Wi-Fi за разгръщане и управление на собствените им VM [12].

Една отворена екосистема, базирана на концепцията за облачета, може да поддържа множество мобилни приложения, които изискват голяма изчислителна мощ и малки закъснения [13]. Например чрез използване на малки закъснения от край до край, взаимодействието в реално време може да бъде осъществено с когнитивна помощ [14]. Чрез анализ на данни в реално време в края на Интернет облачетата могат да намалят широчината на честотната лента в облака [15]. Като представители на облака, които са близо до потребителя, облачетата са недостъпни за кибер атаки и могат да подобрят стабилността и наличността във враждебна среда [16].

3. ИЗЧИСЛЕНИЯ В МЪГЛА

Изчисленията в мъгла (Fog computing), известни още като "мъгла" или "замъгляване", е термин, първоначално въведен от Cisco, който предлага да се даде възможност на архитектурата на изчислителните облаци да бъде далече от централизираните облачни центрове за данни, като се има предвид големия брой географски широко разпространени крайни възли и сътрудничество на облаци. Изчисленията в мъгла предвиждат облакови възли, разположени директно в края на мрежата и са способни да доставят нови приложения и услуги, особено за бъдещите Интернет услуги и безжичните мрежови услуги на Интернет [17], [18]. Изчисленията в мъгла предлагат съхранение в непосредствена близост до края на мрежата и помагат да се намали натоварването на трафика, което в противен случай би трябвало да пресича мобилната транспортна и опорна мрежа. Те също така позволяват управление на устройството и управление на мрежата, като например процедури за управление и конфигуриране в края на мрежата [19].

Понятието за възли за изчисления в мъгла е широко. Всяко оборудване с капацитет за обработка и съхранение, например от безжични точки за достъп, комутатори и маршрутизатори до базови станции и богати на ресурси центрове за данни или облачни платформи, може да бъде квалифицирано като възел в мъгла [20]. Консорциумът OpenFog е създаден, за да стимулира индустрията и академията в изследвания върху архитектури на изчисленията в мъглата, разработката на тестовете, както и разнообразие от продукти за взаимодействие и композиция, които безпроблемно оползотворяват облачните и крайните архитектури, за да позволят IoT сценарии от край до край. Той дефинира изчисленията в мъгла като "хоризонтална архитектура на ниво система, която разпределя ресурсите и услугите за изчисляване, съхранение, управление и работа в мрежа навсякъде от облака до нещата".

Типична йерархична архитектура, базирана на изчисления в мъгла, е показана на фиг.2.



Фиг.2. Типична йерархична структура, базирана на изчисления в мъгла

Възлите в мъглата могат да комуникират помежду си чрез кабелно или безжично предаване. Често в системата за изчисления в мъгла има три нива, но за специалния сценарий на приложение могат да бъдат разрешени и повече нива. В края на мрежата, възлите за мъгла обикновено се съсредоточават върху събирането на данни от сензорите, нормализирането на данните и управлението на сензорите и задвижващите механизми.

От функционална гледна точка, възелът в мъглата има няколко функции, включително работа в мрежа, изчисляване, ускоряване, съхранение и контрол. На следващото по-високо ниво възлите на мъглата са фокусирани върху филтрирането, компресирането и трансформацията на данните.

При по-високите нива или най-близкия, възлите на мъглата са съсредоточени върху обобщаването на данните и превръщането на данните в знание. Архитектурно, възлите на мъглата в края на мрежата може да са по-малки възможности за обработка, комуникации и съхранение от възлите на високи нива. С увеличаването на броя на нивата всяко ниво ще пресява и извлича смислени данни, за да създаде повече интелигентност.

4. ИЗЧИСЛЕНИЯ В МРЕЖАТА ЗА РАДИОДОСТЪП

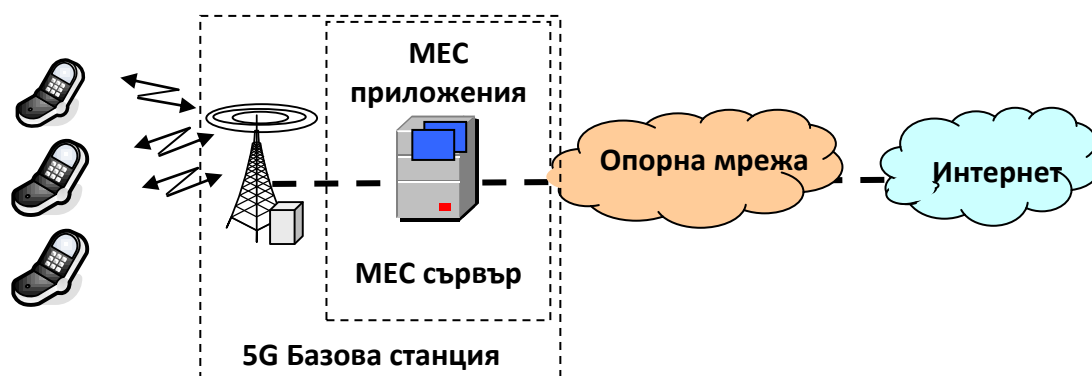
Облачните изчисления в края на мобилната мрежа (Multi-access Edge Computing - MEC) осигурява IT възможности и облачни изчисления в края на мрежата за радиодостъп в непосредствена близост до крайните потребители, като предлага ултраниска латентност, широка честотна лента и достъп до информация за радиомрежата в реално време.

Използването на MEC може да осигури потенциал за разработване на широк спектър от нови приложения и услуги. По-конкретно, контекстуалната информация и специфичното съдържание, близостта и местоположението могат да създадат възможности за бизнес, като предлагат персонализирано мобилно широколентово изживяване. Доставчиците на услуги също могат да се възползват от MEC при събирането на повече информация по отношение на съдържанието, местоположението и интересите на клиентите, за да разграничат портфолиото си или да въведат нови услуги или просто да използват такава информация по търговски причини.

MEC предлага отворена платформа за крайни радиомрежи, като позволява на оторизираните трети страни да използват възможностите за съхранение и обработка, като въвеждат нови услуги и приложения по желание и по гъвкав начин. По този начин операторите могат да предоставят облачни услуги и допълнително да си осигурят приходи от широколентовия достъп, като предоставят информация за мрежата за радиодостъп и мрежовите условия на трети страни, за да улеснят подобряването на услугите.

MEC може също така да се възползва от повсеместното покритие на клетъчните мрежи, за да стане ключов фактор за подпомагане на комуникациите от машинен тип и IoT услугите, които са достатъчно зрели за формиране на вертикални сегменти / услуги, включително енергийни услуги, автомобилостроенето и интелигентните градски услуги [21]. От гледна точка на бизнеса, MEC трябва да даде възможност за сигурна архитектура на облачната платформа и да осигури приложни програмни интерфейси (API), за да позволи на трети играчи да я споделят и използват динамично, лесно да инсталира и модифицира нови услуги и ефективно да взаимодейства с RAN, например за извличане на информация за радиомрежата [22]. MEC може да се разглежда като естествено развитие на съществуващите мобилни базови станции, което дава възможност за нови бизнес възможности и потоци от приходи на оператори, продавачи и трети страни.

Мобилните крайни мрежи могат да се дефинират като: "Архитектура на мобилна мрежа, която разгръща и използва гъвкави ресурси за изчисляване и съхранение в края на мобилната мрежа, включително мрежата за радиодостъп, крайните маршрутизатори, шлюзовете и мобилните устройства и др. с помощта на технологии за софтуерно-дефинирани мрежи и виртуализация на мрежови функции" (фиг.3).



Фиг.3. Разгръщане на MEC

MEC обикновено се намира в точката за достъп на разстояние един възел до крайния потребител. Като се имат предвид приложенията на Интернет на нещата, изследователската работа в [18] изследва местоположението на крайните облачни платформи в точка за агрегиране на клетки и дори до точка за WiFi достъп. В [23] и [25] е разработена безпроблемна интеграция на крайните облачни платформи, разгърнати в малки клетки 5G, които образуват клъстер от взаимосвързани компютърни ресурси.

5. СРАВНЕНИЕ НА ДЕЦЕНТРАЛИЗИРАНИТЕ ОБЛАЧНИ ТЕХНОЛОГИИ

Табл.1 обобщава основните характеристики на тези три крайни изчислителни технологии [25]. Изчисленията в мъгла се инициират, за да се отговори на някои предизвикателства при изпълнението на новите изисквания за IoT. MEC се признава за една от ключовите технологии, отговарящи на изискванията на 5G. Облачетата се предлагат, за да се отговори на някои предизвикателства в областта на мобилните изчисления. От гледна точка на приложенията, MEC дава възможност за отваряне на мрежа за радиодостъп, която може да бъде домакин на иновативни приложения и съдържание от трети страни в края на мрежата. Облачетата позволяват нови класове мобилни приложения, които са интензивни от гледна точка на изчисления, чувствителни към закъснения, в открита екосистема, базирана на облаци. Системите за изчисления в мъгла позволяват висока производителност, оперативна съвместимост и сигурност в екосистема, базирана на множество производители на мъгли. Сходството на трите технологии е отвореност. Операторите отварят своите мрежи към трети страни, за да разгръщат иновативни приложения и услуги.

Табл.1. Сравнение на Cloudlet, MEC и Fog Computing

Показател	Multi-access Edge Computing	Cloudlets	Fog computing
Организация	ETSI MEC, поддържа- на от Huawei, IBM, Intel, Nokia, Networks, NTT DoCoMo и Vodafone	OEC стартирана от Vodafone, Intel, Huawei и универси- тета Camegie Mellon	Консорциум OpenFog, основан от ARM, Cisco, Dell, Intel, Microsoft и университета Princeton

<i>Показател</i>	<i>Multi-access Edge Computing</i>	<i>Cloudlets</i>	<i>Fog computing</i>
Стандартизиращи органи/индустрия	Съответният консорциум е стандартизиращ орган	Консорциумът не е стандартизиращ орган и влияе на други организации като ETSI	Консорциумът не е стандартизиращ орган, съгласие за афилиация на IEEE и ще взаимодейства с други стандартизиращи организации
Бизнес интереси	5G изисквания на телекомуникационната индустрия	Някои приложения, базирани на мобилни изчисления	Интернет на нещата
Мотивация от гледна точка на приложенията	Разрешава отворен достъп до радиомрежата, което дава възможност за разгръщане на приложения и съдържание в края на мрежата	Разрешава нов клас от мобилни приложения, които изискват интензивни изчисления с изисквания за малки закъснения в отворена екосистема, базирана на облачета	Разрешава взаимодействие с висока производителност и сигурност в екосистема на множество доставчици на изчисления в мъгла
Поддържане на отвореност на мрежата	Операторите отварят своите мрежи за трета страна за разгръщане на иновативни приложения и услуги	OPENSTACK++ е платформа с отворен код, която разширява функционалността на Openstack за поддържане на облачета	Еталонната архитектура на OpenFog се използва като базова линия за постигане на взаимодействаща екосистема за изчисления в мъгла с множество доставчици.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За да се адаптира огромният трафик на пакети към динамичните изменения на радиоканала, изчисленията в края на мрежата трябва да бъдат информирани и преконфигурирани. Големите данни, описвани с обем, разнообразие, скорост и стойност, включват данни на ниво абонат, ниво на клетка, ниво опорна мрежа и други нива, които могат да направят мрежата проактивна. Благодарение на бързото развитие на технологиите за извличането на големи данни е възможно да се извличат интересни модели или знания, за да се подобрят самоорганизиращите се способности при крайните изчисления. Предаването на огромния обем данни, събрани от крайните устройства, поставя тежко бреме върху мрежата за достъп, в резултат на което извличането на данни може да бъде предварително изпълнено в крайните устройства. В централизираните изчислителни облаци тази предварителна информация се преработва отново. Междувременно обработката на редки, несигурни и непълни данни е голям проблем, който изисква усъвършенствани алгоритми за извличане на данни.

Оркестрацията и програмируемостта на услуги по отношение на различните слоеве на МЕС платформата (т.е. инфраструктурата, платформата за приложения и услугите, които се намират на платформата) все още са отворени въпроси, които поставят значителни предизвикателства. Оркестрацията на услуги трябва

да се осъществява в координация с възможността за програмуруемост на мрежовите ресурси, отчитайки капацитета и разпределението на виртуализираните мрежови функции, особено при предоставянето на услуги в рамките на набор от крайни облачни платформи. Крайните облачни платформи, разположени в различни административни области, пораждат още допълнителни предизвикателства за оркестрацията на услуги, отчитайки обединени ресурси, където се изискват повече изследвания за процесите на агрегация на ресурсите и картографиране на услуги, освен дефиницията на съответните приложни програмни интерфейси.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. u. R. Khan, M. Othman, S. A. Madani and S. U. Khan, "A Survey of Mobile Cloud Computing Application Models," *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 16, no. 1, pp. 393-413, First Quarter 2014.
- [2] L. Guan, X. Ke, M. Song and J. Song, "A Survey of Research on Mobile Cloud Computing," in *Computer and Information Science(ICIS)*, 2011 IEEE/ACIS 10th International Conference on, Sanya, China, 2011, pp. 387-392.
- [3] H. T. Dinh, C. Lee, D. Niyato, and P. Wang, "A survey of mobile cloud computing: architecture, applications, and approaches," *Wireless communications and mobile computing*, vol. 13, no. 18, pp. 1587-1611, Dec. 2013.
- [4] X. Fan, J. Cao, and H. Mao, "A survey of mobile cloud computing," *ZTE Communications*, vol. 9, n. 1, pp. 4-8, 2011.
- [5] 5G Infrastructure Public Private Partnership, "5G Vision: The 5G Infrastructure Public Private Partnership: the next generation of communication networks and services," [Online]. Available: <https://5gppp.eu/wp-content/uploads/2015/02/5G-Vision-Brochure-v1.pdf>.
- [6] A. Ahmed and E. Ahmed, "A survey on mobile edge computing," in *2016 10th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO)*, Coimbatore, India, 2016, pp. 1-8.
- [7] M. T. Beck, M. Werner, S. Feld and S. Schimper, "Mobile edge computing: A taxonomy," in *Proc. of the Sixth International Conference on Advances in Future Internet*, Citeseer, 2014, pp. 48-54.
- [8] G. Sun and J. Shen, "Facilitating social collaboration in mobile cloud based learning: A teamwork as a service (TaaS) approach," *IEEE Trans. Learn. Technol.*, vol. 7, no. 3, pp. 207–220, Jul./Sep. 2014.
- [9] J. Wu, C. Yuen, N.-M. Cheung, J. Chen, and C. W. Chen, "Enabling adaptive high-frame-rate video streaming in mobile cloud gaming applications," *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 25, no. 12, pp. 1988–2001, Dec. 2015.
- [10] D. B. Hoang and L. Chen, "Mobile cloud for assistive healthcare (MoCAsH)," in *Proc. IEEE Services Comput. Conf. (APSCC)*, Hangzhou, China, Dec. 2010, pp. 325–332.
- [11] M. Satyanarayanan, "Fundamental challenges in mobile computing," in *Proc. 15th Annu. ACM Symp. Principles Distrib. Comput.*, Philadelphia, PA, USA, May 1996, pp. 1–7.

- [12] M. Satyanarayanan, P. Bahl, R. Caceres, and N. Davies, "The case for VM-based cloudlets in mobile computing," vol. 8, no. 4, pp. 14–23, Oct./Dec. 2009.
- [13] M. Satyanarayanan, R. Schuster, M. Ebling, G. Fettweis, H. Flinck, K. Joshi, K. Sabnani, An open ecosystem for mobile-cloud convergence, *IEEE Commun. Mag.* 53 (2015) 63–70.
- [14] K. Ha, Z. Chen, W. Hu, W. Richter, P. Pillai, M. Satyanarayanan, Towards wearable cognitive assistance, in: *Proc. 12th Annu. Int. Conf. Mob. Syst. Appl. Serv. - MobiSys '14*, 2014: pp. 68–81.
- [15] [M. Satyanarayanan, P. Simoens, Y. Xiao, P. Pillai, Z. Chen, K. Ha, W. Hu, B. Amos, Edge analytics in the internet of things, *IEEE Pervasive Comput.* 14 (2015) 24–31.
- [16] M. Satyanarayanan, G. Lewis, E. Morris, S. Simanta, J. Boleng, K. Ha, The role of cloudlets in hostile environments, *IEEE Pervasive Comput.* 12 (2013) 40–49.
- [17] "Fog computing and the Internet of Things: Extend the cloud to where the things are," White Paper, Cisco, San Jose, CA, USA, 2015.
- [18] F. Bonomi, R. Milito, J. Zhu, and S. Addepalli, "Fog computing and its role in the Internet of Things," in *Proc. ACM SIGCOMM Workshop Mobile Cloud Comput.*, Helsinki, Finland, Aug. 2012, pp. 13–16.
- [19] L. M. Vaquero and L. Roderio-Merino, "Finding your way in the fog: Towards a comprehensive definition of fog computing," *ACM SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, vol. 44, no. 5, pp. 27–32, Oct. 2014.
- [20] S. Yi, C. Li, and Q. Li, "A survey of fog computing: Concepts, applications and issues," in *Proc. Workshop Mobile Big Data*, Hangzhou, China, Jun. 2015, pp. 37–42.
- [21] "Mobile edge computing: A key technology towards 5G," White Paper, ETSI, Sophia Antipolis, France, Sep. 2015.
- [22] S. Dutta, T. Taleb, P. A. Frangoudis, and A. Ksentini, "On-the-fly QoE-aware transcoding in the mobile edge," in *Proc. IEEE Globecom*, Washington, DC, USA, Dec. 2016, pp. 1–6.
- [23] F. Lobillo et al., "An architecture for mobile computation offloading on cloud-enabled LTE small cells," in *Proc. IEEE WCNC Workshops*, Istanbul, Turkey, Apr. 2014, pp. 1–6.
- [24] M. A. Peunte, Z. Becvar, M. Rohlik, F. Lobillo, and E. C. Strinati, "A seamless integration of computationally-enhanced base stations into mobile networks towards 5G," in *Proc. IEEE VTC Spring*, Glasgow, U.K., May 2015, pp. 1–5.
- [25] Yuan Ai, Mugen Peng, and Kecheng Zhang, *Edge Computing Technologies for Internet of Things: A Primer*, Digital Communications and networks, Elsevier, 2017, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352864817301335>

Автор: Деница Кирева-Михова, ас. инж., катедра „Технологии и мениджмънт на комуникационни системи”, Факултет по телекомуникации, Технически Университет-София; E-mail address: kireva@tu-sofia.bg

Постъпила на 30.01.2018

Рецензент: проф. д-н Евелина Пенчева

ПАРАМЕТРИ НА СИНХРОНЕН ДВИГАТЕЛ С ВЪТРЕШНИ ПОСТОЯННИ МАГНИТИ

Емил Соколов

Резюме: Представен е метод за изчисление на параметрите на синхронен двигател с вътрешни постоянни магнити на базата на линеен и нелинеен електромагнитен модел. Потокосцепленията и индуктивностите по оси d и q са определени чрез моделиране с МКЕ и дискретно преобразуване на Фурие на индукцията във въздушната междина. Анализирани са резултатите от изчисленияте индуктивности за един двигател при различни работни състояния.

Ключови думи: синхронен двигател с вътрешни постоянни магнити, потокосцепления, синхронни индуктивности

PARAMETERS OF INTERIOR PERMANENT MAGNET SYNCHRONOUS MOTOR

Emil Sokolov

Abstract: A method for the parameter evaluation of an interior permanent magnet synchronous motor based on linear and nonlinear electromagnetic models is presented. The two-axis flux linkages and inductances are determined by FEM modeling and discrete Fourier transform of the air-gap flux density. The estimated inductances of a motor by different operating conditions are analyzed.

Keywords: interior permanent magnet synchronous motor, flux linkages, synchronous inductances

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Синхронните двигатели с вътрешни постоянни магнити са предпочитаните тягови двигатели в задвижването на електромобилите и хибридните автомобили [1, 2, 3]. Тяхното превъзходство спрямо други типове електрически машини се дължи на качествата, придобити от използването на високо енергийни редкоземни магнити. Тези магнити правят възможна реализацията на конструкции с най-голяма плътност на мощността - с малко тегло и размери, с минимален инерционен момент. Заради изключителните свойства на редкоземните магнити, двигателите създават голям максимален момент, необходим за ускоряване на колата. Важно предимство са малките загуби в ротора. Те допринасят за ограничено загриване на ротора и за по-високи стойности на КПД в сравнение с асинхронните тягови двигатели.

Задвижването на електрическите превозни средства се характеризира с работа в широк диапазон на скорости и натоварвания. Вграждането на постоянните магнити в ротора прави безпроблемно укрепването им при висока максимална скорост. Освен това то води до магнитна несиметрия и поява на реактивен момент. Реактивният момент позволява да се намали размагнитващата компонента на статорния ток при регулиране с отслабване на полето и да се увеличи максималната скорост при постоянна мощност.

Изчислението на параметрите (потокосцепления и индуктивности) е важен етап от проектирането и оптимизацията на двигателите. Определянето на тока и момента при установени и динамични режими става с точните стойности на параметрите. Те се нужни за анализ на магнитната верига в гранични състояния и за оптимизация на роторната геометрия. При оразмеряването на статорната намотка се вземат предвид ограниченията, наложени от напрежението на батерията при максимална скорост и мощност. За да се проектира системата за векторно управление на двигателя трябва да се познават стойностите на индуктивностите в цялата област на регулиране.

В настоящата работа е представен метод за определяне на параметрите на базата на линеен и нелинеен електромагнитен модел. Показани са резултатите от изчислените индуктивности на един двигател при различни работни състояния.

2. ОПИСАНИЕ НА МОДЕЛИТЕ

Системата уравнения на синхронния двигател с постоянни магнити в роторна d - q координатна система (преобразуване на Парк) има вида:

$$\begin{aligned} u_d &= Ri_d + \frac{d\Psi_d}{dt} - \omega\Psi_q \\ u_q &= Ri_q + \frac{d\Psi_q}{dt} + \omega\Psi_d^*, \end{aligned} \quad (1)$$

където $\Psi_d^* = \Psi_d + \Psi_{PM}$ (Ψ_{PM} – потокосцепление на постоянните магнити).

Горният математичен модел не е ограничен от условията, свързани с нелинейната магнитна верига и функциите във времето на напрежението и тока. Единственото допускане на преобразуването (1) е: потокосцеплението и мдн на статорните токове имат синусоидално пространствено разпределение.

В класическия линеен модел се приема, че синхронните индуктивности L_d, L_q са константи. Тогава потокосцепленията в (1) са

$$\Psi_d = \Psi_d^* - \Psi_{PM} = L_d i_d; \quad \Psi_q = L_q i_q, \quad (2)$$

откъдето

$$L_d = \frac{\Psi_d^* - \Psi_{PM}}{i_d}; \quad L_q = \frac{\Psi_q}{i_q} \quad (3)$$

Синхронните индуктивности, определени от линейния модел, са подходящи за анализ на установени работни състояния.

Нелинейният модел [4] отчита влиянието на насищането и кръстосаните връзки върху индуктивностите, които зависят от токовете по двете оси. В този случай по-

токосцепленията в (1) са

$$\Psi_d = \Psi_d^* - \Psi_{PM} = L_{dd}i_d + L_{dq}i_q; \quad \Psi_q = L_{qq}i_q + L_{qd}i_d \quad (4)$$

При нелинейния модел диференциалните синхронни индуктивности

$$L_{dd}, L_{qq}, L_{dq}, L_{qd}$$

се намират чрез частните производни на потокосцепленията, апроксимирани с крайни разлики:

$$L_{dd} = \left. \frac{\Delta \Psi_d}{\Delta i_d} \right|_{i_q=\text{const}}; \quad L_{qq} = \left. \frac{\Delta \Psi_q}{\Delta i_q} \right|_{i_d=\text{const}}; \quad L_{dq} = \left. \frac{\Delta \Psi_d}{\Delta i_q} \right|_{i_d=\text{const}}; \quad L_{qd} = \left. \frac{\Delta \Psi_q}{\Delta i_d} \right|_{i_q=\text{const}} \quad (5)$$

Диференциалните синхронни индуктивности са подходящи за анализ на динамични режими.

При определянето на двата вида индуктивности потокосцепленията се изчисляват с помощта на метода на крайните елементи (МКЕ). Прилагането на МКЕ води до прецизно отчитане на насищането и анизотропията на магнитната верига. В известните публикации [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] потокосцепленията са определени с алгоритъм, който се основава на теоремата на Стокс, приложена към магнитния вектор потенциал. Потокосцепленията на трите фази при натоварване са изчислени чрез разлики между средните стойности на вектор потенциала по напречните сечения на страните на секциите в каналите. След това са получени потокосцепленията по двете оси, като е приложено преобразуване $\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c \rightarrow \Psi_d, \Psi_q$. В [4] е отбелязано, че функциите на така определените диференциални индуктивности са „пълни с шипове”.

В предложения тук метод потокосцепленията са определени чрез дискретно преобразуване на Фурие (DFT) на магнитната индукция във въздушната междина при натоварване на двигателя. Потокосцепленията по надлъжната и напречната ос са изчислени посредством функциите на магнитната индукция в междината, които имат синусоидално пространствено разпределение. По такъв начин методът е съгласуван с основното допускане в преобразуването на Парк. Това е съществено предвид факта, че действителната пространствена форма на вълната на потокосцеплението се отличава от синусоида.

Задачата е решена в следната последователност. Задават се компонентите на пространствения вектор на тока i_d и i_q . Определят се моментните стойности на фазовите токове при условие, че оста на фаза a съвпада с ос d :

$$i_a = i_d; \quad i_b = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i_q - i_d); \quad i_c = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}i_q + i_d) \quad (6)$$

Плътноста на тока в каналите на крайно-елементния модел се изчислява с токовете на трите фази. След като се получи решението на полевата задача с МКЕ, амплитудите на основните хармоници на магнитната индукция във въздушната междина по оси d и q се определят чрез дискретно преобразуване на Фурие:

$$B_q = a_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} B_{\alpha} \cos\left(\frac{2\pi}{n} i\right), \quad B_d = b_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} B_{\alpha} \sin\left(\frac{2\pi}{n} i\right), \quad (7)$$

където n е броят на дискретните стойности на индукцията за двойка полюси.

Компонентите на магнитния поток за един полюс и на потокосцепленията се пред-

ставят със следните изрази:

$$\Phi_{d,q} = \frac{2}{\pi} l \tau B_{d,q}; \quad \Psi_d^* = w k_w \Phi_d, \quad \Psi_q = w k_w \Phi_q \quad (8)$$

В получените от (8) стойности не са включени потокосцепленията на канално и челно разсейване. Те могат да бъдат отчетени с помощта на известните от литературата методи. Модулът на пространствения вектор на потокосцеплението на статорната намотка и ъгълът на натоварване са съответно:

$$\Psi_s = \sqrt{\Psi_d^{*2} + \Psi_q^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\Psi_q}{\Psi_d^*} \quad (9)$$

Амплитудата на индуктираното едн в една фаза на намотката е:

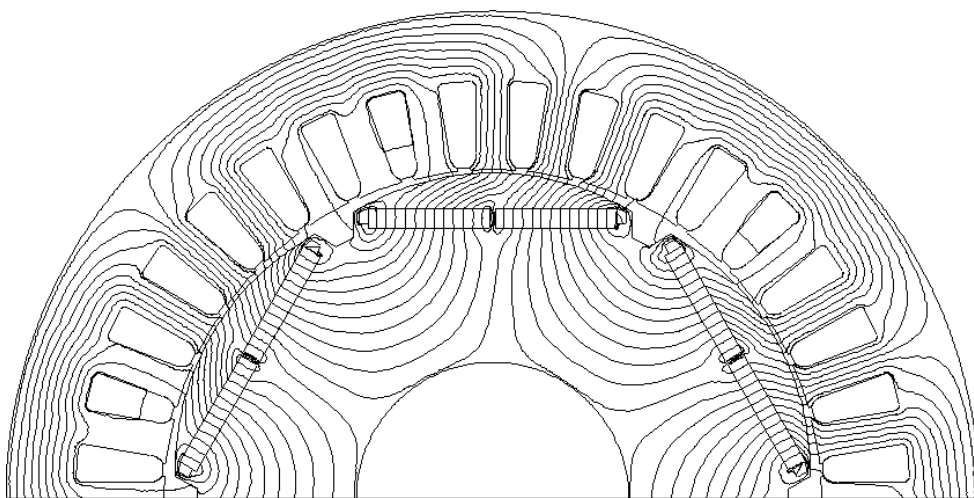
$$E_s = \omega \Psi_s \quad (10)$$

След като към E_s се прибави падът на напрежение в съпротивлението R , получава се фазното напрежение на двигателя.

3. ОБЕКТ И РЕЗУЛТАТИ

Проверка на описания метод е направена с тягов двигател, изпълнен на базата на шест полюсен синхронен двигател на фирмата Kienle+Spiess [11] с NdFeB постоянни магнити. Статорният пакет има размери: външен диаметър 200 mm, вътрешен диаметър 135 mm, дължина 150 mm. Статорната намотка е еднослойна, концентрична, с два канала на полюс и фаза и три паралелни клона. Броят на последователните навивки на фаза е $w=24$, коефициентът на намотката е $k_w=0,966$. Постоянните магнити имат остатъчна индукция 1,28 Т и относителна магнитна проницаемост 1,087.

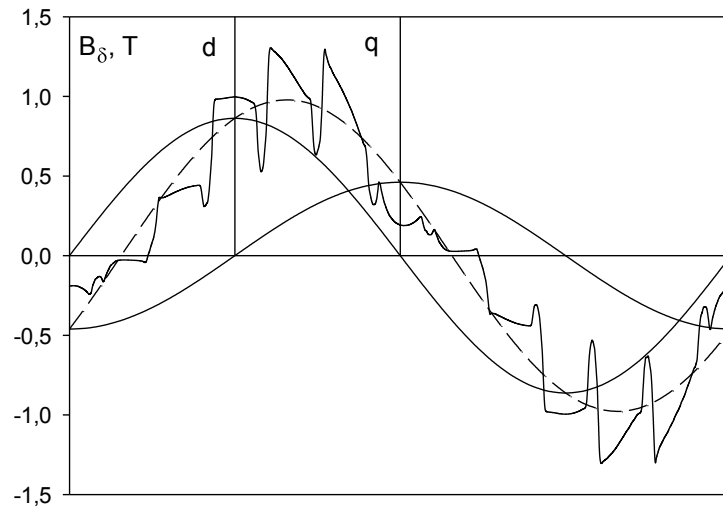
Изследванията са проведени с различни стойности на i_d и i_q в областта на номиналния момент и на максималната скорост. По-долу са дадени резултати за един от случаите, при който $i_d = -10$ А, $i_q = 110$ А. Мощността при базова скорост 2500 об/мин е 18 kW. На фиг.1 е представена картината на полето в напречното сечение на двигателя.



Фиг.1. Магнитно поле при $i_d = -10$ А, $i_q = 110$ А.

С дискретното преобразуване ($n=1000$) са определени $a_1 = B_q = -0,46140442753$ Т; $b_1 = B_d = 0,86280299565$ Т. Изчислени са: $\Psi_s = 0,152322321$ Wb, $\omega = 785,4$ s⁻¹, $E_s = 119,6$ V, $U_m = 122$ V ($R = 0,023$ Ω), $\theta = 28,1$ deg, $\cos \varphi = 0,924$.

На фиг.2 са показани функциите на магнитната индукция във въздушната междина, нейният основен хармониик (с пунктир) и компонентите на индукцията по надлъжната и напречната ос.



Фиг.2. Функции на магнитната индукция във въздушната междина.

В табл.1 са дадени потокосцепленията, изчислени с помощта на МКЕ и дискретно преобразуване на Фурие ($n = 1000$) за две групи на токовете i_d и i_q – около базовата скорост (1-4) и при два пъти по-голяма скорост (5-8). Всяка група включва пълна комбинация от зададените стойности на токовете по двете оси. Състоянието на магнитната верига може да се прецени чрез сравняване на Ψ_s . Във всяка група то е приблизително еднакво.

Табл.1

№	i_d	i_q	Ψ_d^*	Ψ_q	Ψ_s	M	M^*	θ
	A	A	Wb	Wb	Wb	N.m	N.m	deg
1	- 10	110	0,1343216238	0,0718316837	0,152322321	68,75	69,72	28,1
2	- 14	110	0,1326921793	0,0720756767	0,151003701	69,20	70,22	28,5
3	- 14	114	0,1324564408	0,0740144682	0,151732825	71,37	72,61	29,2
4	- 10	114	0,1340743649	0,0737619843	0,153025376	70,79	72,10	28,8
5	- 10	46	0,1369197466	0,0340283895	0,141084897	30,20	29,87	14,0
6	- 14	46	0,1351335157	0,0341188772	0,139374190	30,45	30,12	14,2
7	- 14	50	0,1350468553	0,0369514551	0,140010939	33,00	32,71	15,3
8	- 10	50	0,1367844833	0,0367557687	0,141636794	32,34	32,43	15,0

В табл.1 електромагнитният момент M е определен с тензора на напрежението на Максвел от решенията на полевата задача, а M^* е изчислен чрез потокосцеп-

ленията и токовете по формулата (11)

$$M^* = \frac{3}{2} p (\Psi_d^* i_q - \Psi_q i_d), \quad (11)$$

където p е брой на чифтовете полюси. Съответствието между M и M^* потвърждава адекватността на предложения метод.

Потокосцепленията на постоянните магнити са необходими за определянето на синхронните индуктивности. От (2) следва, че при $i_d = 0$ потокосцеплението по надлъжната ос Ψ_d^* е равно на Ψ_{PM} . В табл.2 са показани потокосцепленията на постоянните магнити за първата група, изчислени с МКЕ и дискретно преобразуване. За да се получи еднакво насищане на магнитопровода (понеже отсъства размагнитващото действие на $-i_d$), стойностите на i_q са избрани по такъв начин, че съответните потокосцепления Ψ_s в табл.1 и табл.2 да бъдат приблизително равни.

Табл.2

№	i_d	i_q	$\Psi_d^* = \Psi_{PM}$	Ψ_q	Ψ_s
	A	A	Wb	Wb	Wb
1	0	91	0,1393908175	0,061601729	0,1523961057
2	0	83	0,1398056456	0,0572826019	0,1511328051
3	0	87	0,1396036297	0,059467300	0,1517416660
4	0	95	0,1391664254	0,0636944229	0,1530499052

Насищането на магнитната верига във втората група е много по малко. Затова индуктивностите са изчислени с потокосцеплението $\Psi_{PM} = 0,1415801189$ Wb, получено при празен ход ($i_d = i_q = 0$).

В табл.3 са дадени синхронните индуктивности, пресметнати по (3) и (5). Диференциалните индуктивности са определени чрез потокосцепленията (табл.1) с $\Delta i_d = -4$ A (при $i_q = \text{const}$) и $\Delta i_q = 4$ A (при $i_d = \text{const}$). Изчислението на $\Delta \Psi_d$ в (5) е извършено с отчитане на съответните стойности на Ψ_{PM} .

От табл.1 се вижда, че потокосцеплението Ψ_q зависи значително от i_q , докато връзката на Ψ_d^* с тази компонента на тока е много по-слаба. Нарастването на отрицателната надлъжна компонента на тока i_d (при $i_q = \text{const}$) действа размагнитващо на Ψ_d^* и намагнитващо на Ψ_q , така че Ψ_s се променя сравнително малко.

Отношението между L_q и L_d е в граници 1,3–1,6 (табл.3). При увеличаване на насищането (по-голямо i_q) L_d нараства, а L_q намалява. Отношението между L_{qq} и L_{dd} е в граници 0,95–1,63. Влиянието на повишеното насищане личи от сравнението на данните в табл.3 – индуктивността L_{dd} се увеличава средно с 16 %, а L_{qq} намалява с около 30 % при по-голямо насищане. Кръстосаните индуктивности L_{qd} и L_{dq} са отрицателни.

Табл.3

№	i_d	i_q	L_d	L_q	L_{dd}	L_{qd}	L_{qq}	L_{dq}
	A	A	mH	mH	mH	mH	mH	mH
1	- 10	110	0,5069	0,6530	0,51107	-0,0610	0,4826	-0,00572
2	- 14	110	0,5081	0,6552			0,4847	-0,00843
3	- 14	114	0,5105	0,6492	0,51378	-0,0631		
4	- 10	114	0,5092	0,6469				
5	- 10	46	0,4660	0,7397	0,44656	-0,0226	0,6818	-0,0338
6	- 14	46	0,4605	0,7417			0,7081	-0,0217
7	- 14	50	0,4667	0,7390	0,43441	-0,0489		
8	- 10	50	0,4795	0,7351				

Важно е да се посочи, че получените стойности на диференциалните индуктивности L_{dd} са близки до тези на синхронните индуктивности L_d , докато стойностите на L_{qq} са по-малки от L_q . Това се дължи на ефектите на кръстосано насищане и комбинирано действие на токовете по двете оси.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Публикуваните изследвания и резултати по определянето на индуктивностите на синхронни двигатели с вътрешни постоянни магнити се основават на моделиране с метода на крайните елементи и преобразуване в $d-q$ координатна система.

Разпространеният метод за изчисление на потокосцепленията при натоварване прилага интегриране на вектор потенциала върху сечението на статорните канали. Предимство на описания метод е използването на потокосцесцепления със синусоидално пространствено разпределение, определени чрез дискретно преобразуване на индукцията във въздушната междина. Това е допускането, с което е изпълнено преобразуването на Парк.

Показан е начин за получаване на потокосцеплението на постоянните магнити с отчитане на състоянието на магнитната верига при по-силно насищане.

При всички методи са налице някои проблеми, които ограничават точността. Такъв проблем е грешката при определяне на потокосцеплението на постоянните магнити. Тази грешка може да бъде намалена посредством метода със замръзвали магнитни проницаемости (frozen permeability method), но с цената на удължено време за изчисление. Такова решение не е приемливо за оптимизационни задачи. Необходим е контрол при приложението на числените методи, например: за точността на МКЕ в случаите на много голямо насищане на магнитопровода или за избора на броя дискретите при дискретното преобразуване на Фурие. В представените тук резултати броят на дискретните стойности на индукцията за DFT е малко по-голям от удвоения брой на възлите във въздушната междина за чифт полюси.

В настоящата работа са представени изчисления със сравнително малък брой на токовете по двете оси. Целта е да се демонстрира изпълнението на метода. Детайлният анализ на свойствата и параметрите на синхронния двигател с вътрешни постоянни магнити предполага изследването на по-широка област от режими и конструкции.

Въпреки посочените проблеми предложеният алтернативен метод за идентификация на потокосцепленията заслужава да бъде проверяван чрез измерване индуктивностите на двигателите.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hendershot J., Electric traction choices for hybrid & electric vehicles, Florida International University, 2014
- [2] Sokolov E., Comparative study of electric car traction motors, International Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems (ELMA), 2017
- [3] Electric & Hybrid Vehicle Technology International Magazine, 2015, 2016, 2017.
- [4] Stumberger B., G. Stumberger, D. Dolinar, A. Hamler, M. Trlep, Evaluation of saturation and cross-magnetization effects in interior permanent magnet synchronous motor, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 39, 2003
- [5] Chedot L., G. Friedrich, A cross saturation model for interior permanent magnet synchronous machine. Application to a starter-generator, IEEE Industry Applications Conference, Vol.1, 2004
- [6] Zarko D., D. Ban, R. Klaric, Finite element approach to calculation of parameters of an interior permanent magnet motor, Automatika, 3-4, 2005
- [7] Seong L., T. Burrell, L. Tolbert, Power-factor and torque calculation with consideration of cross saturation of the interior permanent magnet synchronous motor with brushless field excitation, IEEE Electric Machines and Drives Conference, 2009
- [8] Nerg J., M. Rilla, V. Ruuskanen, J. Pyrhonen, S. Ruotsalainen, Direct-driven interior magnet permanent-magnet synchronous motors for a full electric sports car, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 61, 2014
- [9] Zhang Y., W. Cao, S. McLoone, J. Morrow, Design and flux-weakening control of an interior permanent magnet synchronous motor for electric vehicles, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 26, 2016.
- [10] Тодоров Г., Б. Стоев, Изследване на пулсациите на момента на синхронни двигатели с възбуждане от постоянни магнити, Годишник на Технически Университет-София, том 66, кн. 1, 2016
- [11] Kienle+Spiess, Permanent Magnet Excited Motor Range - KSPM, 2017

Автор: Емил Соколов, проф. дтн, катедра „Електрически машини”, Електротехнически Факултет, Технически Университет-София, E-mail address: ersokolov@abv.bg

Постъпила на 21.03.2018 г.

Рецензент: доц. д-р Георги Тодоров

НЯКОИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВКЛЮЧВАЩИ ПРОСТИ ЧИСЛА

Радослав Цветков

Резюме: В настоящият кратък обзор разглеждаме някои уравнения и неравенства с прости числа, които са решени с методите на аналитична теория на числата.

Ключови думи: Уравнения, неравенства, прости числа.

ON SOME EQUATIONS AND INEQUALITIES INVOLVING PRIMES

Radoslav Tsvetkov

Abstract: In this brief survey we consider some equations and inequalities with primes, solved by the methods of analytic number theory.

Keywords: Equations, inequalities, primes.

1 Introduction

Recently Dimitrov [13] has made an overview of the basic diophantine equations and inequalities with prime numbers, solved by methods of analytic number theory.

Of course the field of equations and inequalities involving primes is too extensive and there are a lot of cases that are not included in the work of Dimitrov.

Motivated by [13] we present a brief survey of some specific equations and inequalities with prime numbers and that extends the work of Dimitrov.

2 Equations involving primes

2.1 Arbitrarily long arithmetic progressions with prime numbers

The celebrated Green-Tao theorem [16] asserts that for any natural $k \geq 3$ there exist infinitely many k -term arithmetic progressions of prime numbers. In other words they showed that for any natural $k \geq 3$, the linear system

$$p_i - 2p_{i+1} + p_{i+2} = 0 \quad (1 \leq i \leq k-2) \quad (1)$$

has infinitely many solutions in distinct primes $p_1, \dots, p_k$.

Green and Tao deduce the existence of such arithmetic progressions from a generalization of a theorem of Szemerédi [36], [37].

Let P_l is a number with at most l prime factors.

In 2006 Green and Tao [15] proved that for $k = 3$ the system (1) has infinitely many non-trivial solutions in primes p_1, p_2, p_3 such that $p_i + 2 = P_2$, $i = 1, 2, 3$.

Subsequently Zhou [45] generalized the result of Green and Tao and showed that for $k \geq 3$ the system (1) has infinitely many solutions in distinct primes $p_1, \dots, p_k$ such that $p_i + 2 = P_2$, $i = 1, \dots, k$.

In 2018 Joni Teräväinen [38] proved that for $k = 3$ the system (1) has infinitely many non-trivial solutions in primes p_1, p_2, p_3 , such that $p_k = x_k^2 + y_k^2 + 1$, $k=1,2,3$. (A weaker results of this type was previously obtained by Dimitrov [4], [5]). Subsequently Dimitrov published the papers [10], [12].

Further Sun and Pan [35] generalized Teräväinen's result and showed that for $k \geq 3$ the system (1) has infinitely many solutions in distinct primes $p_1, \dots, p_k$ such that $p_i = x_i^2 + y_i^2 + 1$, $i = 1, \dots, k$.

2.2 Equations involving fractional powers with prime numbers

In 1973 Deshouillers [2] proved that when $1 < c < 4/3$, every sufficiently large integer N can be represented in the form

$$N = [m_1^c] + [m_2^c],$$

with integers m_1 and m_2 . Here $[t]$ denotes the integer part of t .

Subsequently this result was improved by Gritsenko [18], and later by Konyagin [24]. In particular, the latter author achieved the range $1 < c < 3/2$.

Further Balanzario, Garaev and Zuazua [1] showed that when $1 < c < 17/11$, almost all N can be represented in the form

$$N = [p^c] + [m^c], \tag{2}$$

where p is a prime and m is an integer.

In 2009 Kumchev [26] showed that if $1 < c < 16/15$ then every sufficiently large integer N can be represented in the form (2).

Subsequently Petrov and Tolev [32] proved that when $1 < c < 29/28$, every sufficiently large integer N can be represented in the form (2), where p is a prime and m is an almost prime with at most $\left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$ prime factors.

In 1995, Laporta and Tolev [27] considered the equation

$$N = [p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c], \tag{3}$$

where p_1, p_2, p_3 are primes, $c > 1$ is a real number, N is a large positive integer.

Let

$$R(N) = \sum_{N=[p_1^c]+[p_2^c]+[p_3^c]} \log p_1 \log p_2 \log p_3.$$

Laporta and Tolev [27] proved that when $1 < c < 17/16$, then the asymptotic formula

$$R(N) = \frac{\Gamma^3(1 + 1/c)}{\Gamma(3/c)} N^{3/c-1} + \mathcal{O}\left(N^{3/c-1} \exp\left(-(\log N)^{1/3-\varepsilon}\right)\right) \quad (4)$$

holds. Here $\varepsilon > 0$ is a fixed small constant.

Subsequently Kumchev and Nedeva [25] improved the result of Laporta and Tolev, showing that (4) holds for $1 < c < 12/11$.

The interval of Kumchev and Nedeva was improved to $1 < c < 258/235$ by Zhai and Cao [43] and this is the best result up to now.

In 2017 Petrov [31] considered the equation (3) for prime numbers of a special type and proved the theorem

Theorem 1 *Suppose that $1 < c < 17/16$. Then for every sufficiently large N the equation (3) has a solution in prime numbers p_1, p_2, p_3, p_4 such that for each $i \in \{1, 2, 3\}$, $p_i + 2$ has at most $\left[\frac{95}{17-16c}\right]$ prime factors, counted with the multiplicity.*

In order to achieve this result Petrov uses the following Tolev's theorems

Theorem 2 *Suppose that δ, ξ and μ be positive real numbers depending on $c > 1$ such that*

$$\xi + 3\delta < \frac{12}{25}, \quad \mu < 1.$$

Let $D = X^\delta$ and $\lambda(d)$ be complex numbers defined for $d \leq D$ such that

$$|\lambda(d)| \leq 1, \quad \lambda(d) = 0 \quad \text{if} \quad 2|d \quad \text{or} \quad \mu(d) = 0.$$

If

$$L(\alpha, X) = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X < p \leq X \\ p+2 \equiv 0 \pmod{d}}} e(p^c \alpha) \log p$$

then for $|\alpha| < X^{\xi-c}$ we have

$$L(\alpha, X) = \left(\int_{\mu X}^X e(\alpha t^c) dt \right) \sum_{d \leq D} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} + \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\log X)^A}\right),$$

where $A > 0$ is an arbitrary large constant.

Proof. See ([40], Lemma 10).

Theorem 3 *Let $1 < c < 15/14$ and*

$$\xi = \frac{459c - 435}{125}, \quad \delta = \frac{180 - 168c}{125}.$$

Suppose that

$$D = X^\delta, \quad |\Delta| = X^{\xi-c}, \quad 0 < \mu < 1, \quad \Xi = (\log X)^{A+3},$$

where $A > 0$ is an arbitrary large constant.

Let $\lambda(d)$ be complex numbers defined for $d \leq D$ such that

$$|\lambda(d)| \leq 1, \quad \lambda(d) = 0 \quad \text{if } 2|d \quad \text{or} \quad \mu(d) = 0.$$

Then for the sum

$$L(\alpha, X) = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X < p \leq X \\ p+2 \equiv 0 \pmod{d}}} e(p^c \alpha) \log p$$

there exists $\varkappa(c) > 0$ such that

$$\sup_{\Delta \leq \alpha \leq \Xi} |L(\alpha, X)| \ll X^{2-c-\varkappa(c)}.$$

Proof. See ([40], Lemma 15).

Another applications of Theorem 2 and Theorem 3 can be found in [7], [11], [14].

3 Inequalities involving primes

3.1 Bounded gaps between primes

Let p_n denotes the n -th prime number. A prime gap is the difference between two consecutive prime numbers. In number theory Polignac's conjecture states that for any positive even number k , there are infinitely many prime gaps of size k . In other words for any positive even number k , there exist infinitely many n such that

$$p_{n+1} - p_n = k.$$

The case $k = 2$ it is the twin prime conjecture.

While a proof of Polignac's conjecture seems to be out of reach by present methods, in 2013 Zhang [44] showed that there are infinitely many prime gaps of size k for some value of $k < 70,000,000$. In other words Zhang proved that there exist infinitely many n such that

$$p_{n+1} - p_n < \theta, \tag{5}$$

where $\theta = 70,000,000$.

Zhang's method is a refinement of the work of Goldston, Pintz and Yıldırım [17] on the small gaps between consecutive primes.

Subsequently Maynard [30] and Tao independently improved the result of Zhang and showed that there exist infinitely many n such that the inequality (5) holds for $\theta = 600$.

In 2014 Polymath [33] improved the result of Maynard and Tao and showed that there exist infinitely many n such that the inequality (5) holds for $\theta = 246$ and this is the best result up to now.

3.2 The distribution of αp modulo one

Let α be irrational, β be real and let $\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$.

In 1947 Vinogradov [42] proved that if $0 < \theta < 1/5$ then there are infinitely many primes p such that

$$\|\alpha p + \beta\| < p^{-\theta}. \quad (6)$$

Latter the upper bound for θ was improved by several authors (Harman [19], [20], Jia [22], [23]) and the strongest published result is due to Heath-Brown and Jia [21] with $\theta < 16/49$.

In 2009 Matomäki [29] considered the inequality (6) for $\beta = 0$. Using Harman's sieve method with arithmetical information coming from bounds for averages of Kloosterman sums she proved the following theorem

Theorem 4 *Let α be irrational, $\varepsilon > 0$ and $\theta = 1/3 - \varepsilon$. Then there exist infinitely many primes p such that*

$$\|\alpha p\| < p^{-\theta}.$$

In 2010 Todorova and Tolev [39] considered the inequality (6) for prime numbers of a special type and proved the theorem

Theorem 5 *Let α be irrational, β be real and let $0 < \theta \leq 1/100$. Then there are infinitely many primes p satisfying*

$$\|\alpha p + \beta\| < p^{-\theta}$$

and such that $p + 2$ has at most four prime factors.

In order to achieve this result Todorova and Tolev proved the following theorem

Theorem 6 *Let α be irrational, δ and θ be real constants satisfying*

$$0 < \theta < \frac{\delta}{2}, \quad \delta + \theta < \frac{1}{3}, \quad 0 < \theta \leq \frac{1}{100}.$$

Suppose that

$$D = N^\delta, \quad H = N^\theta \log^2 N.$$

Let $\xi(d)$, $c(k)$ be complex numbers defined for $d \leq D$, $0 < |k| \leq H$ such that

$$\xi(d) \ll 1, \quad c(k) \ll 1.$$

Then there exists a sequence $\{N_j\}_{j=1}^\infty$, $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$, such that if

$$S(N) = \sum_{d \leq D} \xi(d) \sum_{1 \leq |k| \leq H} c(k) \sum_{\substack{N/2 < p \leq N \\ p+2 \equiv 0 \pmod{d}}} e(\alpha p k) \log p$$

then we have

$$S(N_j) \ll \frac{N_j}{\log^2 N_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Proof. See ([39], Lemma 1).

Applications of the techniques of the proof of Theorem 6 can be found in [3], [6], [8], [9].

Subsequently Matomäki [28] improved the result of Todorova and Tolev with respect to the number of prime factors of $p + 2$ with the following theorem

Theorem 7 *Let α be irrational, β be real and let $0 < \theta \leq 1/1000$. Then there are infinitely many primes p satisfying*

$$||\alpha p + \beta|| < p^{-\theta}$$

and such that $p + 2$ has at most two prime factors.

In order to achieve this result Matomäki proved the theorem

Theorem 8 *Let α be a real number with a rational approximation $\frac{a}{q}$ satisfying*

$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$, where $(a, q) = 1$, $q \geq 1$, $a \neq 0$ and $\eta > 0$. Let c_k be divisor-bounded, that is $c_k \ll \tau(k)^C$ for some $C > 0$. Then for any well-factorable function λ of level D , we have

$$\sum_{\substack{d \sim D \\ (d, c)=1}} \lambda_d \sum_{k \sim K} \lambda_d \sum_{\substack{n \sim x \\ n \equiv c \pmod{d}}} \Lambda(n) e(\alpha n k) \\ \ll K (\log x)^C x^{3/4+\eta} \left(\frac{x}{q} + \frac{q}{K} + D^2 + x^{7/9+4\eta} + \min \left\{ D^{4+20\eta}, \frac{x}{D} \right\} \right)^{1/4-\eta}.$$

Proof. See ([28], Theorem 1).

In 2012 Shi [34] improved the result of Matomäki with $\theta = 1.5/100$. More precisely he proved the theorem

Theorem 9 *Let α be irrational, β be real and let $0 < \theta \leq 1.5/100$. Then there are infinitely many primes p satisfying*

$$||\alpha p + \beta|| < p^{-\theta}$$

and such that $p + 2$ has at most two prime factors.

The result of Shi is the best up to now.

Further Teräväinen [38] considered the inequality (6) for primes of the form $x^2 + y^2 = 1$ and proved the theorem

Theorem 10 *Let α be irrational, β be real, $\varepsilon > 0$ and $\theta = 1/80 - \varepsilon$. Then there are infinitely many primes of the form $p = x^2 + y^2 = 1$ such that*

$$||\alpha p + \beta|| < p^{-\theta}.$$

Another interesting results in relation to the distribution of αp modulo one is due to Vaughan [41]. In 1977 he proved the following theorem

Theorem 11 *Let α be irrational and β be real. Then there are infinitely many prime numbers p such that*

$$||\alpha p + \beta|| \ll p^{-1/4} \log^8 p.$$

References

- [1] Balanzario E., M. Garaev, R. Zuazua (2007), ***Exceptional set of a representation with fractional powers***, Acta Math. Hungar., **114**, (2007), 103 – 115.
- [2] Deshouillers J. (1973/74), ***Un problème binaire en théorie additive***, Acta Arith., **25**, (1973/74), 393 – 403.
- [3] Dimitrov S., T. Todorova (2015), ***Diophantine approximation by prime numbers of a special form***, Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Inform., **102**, (2015), 71 – 90.
- [4] Dimitrov S. I. (2016), ***Arithmetic progressions of three prime numbers with one of the form $p = x^2 + y^2 + 1$*** , Proc. Techn. Univ.-Sofia, **66**, 3, (2016), 45 – 54.
- [5] Dimitrov S. I. (2016), ***Arithmetic progressions of three prime numbers with two of the form $p = x^2 + y^2 + 1$*** , Proc. Techn. Univ.-Sofia, **66**, 3, (2016), 55 – 64.

- [6] Dimitrov S. I. (2016), *Study of diophantine inequalities and arithmetic progressions using number theory methods*, Thesis, Technical University - Sofia, (2016), (in Bulgarian).
- [7] Dimitrov S. I. (2017), *A quaternary diophantine inequality by prime numbers of a special type*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, **67**, 2, (2017), 317 – 326.
- [8] Dimitrov S. I. (2017), *A ternary diophantine inequality over special primes*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, **39**, 3, (2017), 335 – 368.
- [9] Dimitrov S. I. (2017), *On a diophantine inequality with prime powers of a special type*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, **67**, 3, (2017), 25 – 33.
- [10] Dimitrov S. I. (2017), *Prime triples p_1, p_2, p_3 in arithmetic progressions such that $p_1 = x^2 + y^2 + 1$, $p_3 = [n^c]$* , Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **23**, 4, (2017), 22 – 33.
- [11] Dimitrov S. I. (2017), *Diophantine approximation by special primes*, arXiv:1702.06413v3 [math.NT] 10 May 2017.
- [12] Dimitrov S. I. (2017), *The ternary Goldbach problem with prime numbers of a mixed type*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **24**, 2, (2018), 6 – 20.
- [13] Dimitrov S. I. (2018), *Diophantine equations and inequalities with prime numbers*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, **68**, 2, (2018), 193 – 202.
- [14] Dimitrov S. I. (2018), *Combination of circle method and sieve method*, Monograph, Heron Press-Sofia, (2018), (in Bulgarian).
- [15] Green B., T. Tao (2006), *Restriction theory of the Selberg sieve, with applications*, J. Theor. Nombres Bordeaux, **18**, (2006), 147 – 182.
- [16] Green B., T. Tao (2008), *The Primes Contain Arbitrarily Long Arithmetic Progressions*, Annals of Mathematics, **167**, 2, (2008), 481 – 547.
- [17] Goldston D., J. Pintz, C. Yildirim (2009), *Primes in Tuples I*, Annals of Mathematics, **170**, (2009), 819 – 862.
- [18] Gritsenko S. (1992), *Three additive problems*, Izv. Ross. Akad. Nauk, **41**, (1992), 447 – 464, (in Russian).
- [19] Harman G. (1983), *On the distribution of αp modulo one*, J. London Math. Soc., **27**, (1983), 9 – 18.

- [20] Harman G. (1996), *On the distribution of αp modulo one II*, Proc. London Math. Soc., **72**, (1996), 241 – 260.
- [21] Heath-Brown D. R., C. Jia (2002), *The distribution of αp modulo one*, Proc. London Math. Soc., **84**, (2002), 79 – 104.
- [22] Jia C. (1993), *On the distribution of αp modulo one*, Journal of Number Theory, **45**, (1993), 241 – 253.
- [23] Jia C. (2000), *On the distribution of αp modulo one II*, Sci. China Ser. A, **43**, (2000), 703 – 721.
- [24] Konyagin S. (2003), *An additive problem with fractional powers*, Mat. Zametki, **73**, (2003), 633 – 636, (in Russian).
- [25] Kumchev A., T. Nedeva (1998), *On an equation with prime numbers*, Acta Arith., **83**, (1998), 117 – 126.
- [26] Kumchev A. (2009), *A binary additive equation involving fractional powers*, International Journal of Number Theory, **5**, (2009), 281 – 292.
- [27] Laporta M. B., D. I. Tolev (1995), *On an equation with prime numbers*, Mat. Zametki, **57**, (1995), 926 – 929.
- [28] Matomäki K. (2009), *A Bombieri-Vinogradov type exponential sum result with applications*, Journal of Number Theory, **129**, (2009), 2214 – 2225.
- [29] Matomäki K. (2009), *The distribution of αp modulo one*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **147**, (2009), 267 – 283..
- [30] Maynard J. (2015), *Small gaps between primes*, Annals of Mathematics, **181**, 1, (2015), 383 – 413.
- [31] Petrov Z., D. Tolev (2016), *On an equation involving fractional powers with one prime and one almost prime variables*, arXiv:1604.03885v2 [math.NT] 17 Apr 2016.
- [32] Petrov Z. (2017), *On an equation involving fractional powers with prime numbers of a special type*, arXiv:1705.07484v1 [math.NT] 21 May 2017.
- [33] Polymath D. H. J., (2014), *New equidistribution estimates of Zhang type*, Algebra and Number Theory, **8**, (2014), 2067 – 2199.
- [34] Shi S. (2012), *On the distribution of αp modulo one for primes p of a special form*, Osaka J. Math., **49**, (2012), 993 – 1004.

- [35] Sun Y., H. Pan (2017), *The Green-Tao theorem for primes of the form $\mathbf{p} = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{1}$* , arXiv:1708.08629v2 [math.NT] 31 Aug 2017.
- [36] Szemerédi E. (1969), *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **20**, (1969), 89 – 104.
- [37] Szemerédi E. (1975), *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith., **27**, (1975), 299 – 345.
- [38] Teräväinen J. (2018), *The Goldbach problem for primes that are sums of two squares plus one*, Mathematika, **64**, 1, (2018), 20 – 70.
- [39] Todorova T., D. Tolev (2010), *On the distribution of αp modulo one for primes p of a special form*, Math. Slovaca, **60**, (2010), 771 – 786.
- [40] Tolev D. (2017), *On a diophantine inequality with prime numbers of a special type*, Proc. Steklov Inst. Math., **299**, (2017), 246 – 267.
- [41] Vaughan R., (1977), *On the distribution of αp modulo 1*, Mathematika **24**, (1977), 135 – 141.
- [42] Vinogradov I. M., (1947), *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Trud. Math. Inst. Steklov, **23**, (1947), 1 – 109, (in Russian).
- [43] Zhai W., X. Cao (2002), *A Diophantine equation with prime numbers*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), **45**, (2002), 3, 443 – 454.
- [44] Zhang Y. (2014), *Bounded gaps between primes*, Annals of Mathematics, **179**, 3, (2014), 1121 – 1174.
- [45] Zhou B. (2009), *The Chen primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Acta Arithmetica, **138**, (2009), 301 – 315.

Author: Radoslav Tsvetkov, Assoc. Prof., Department "Mathematical analysis and differential equations", FAMI, Technical University-Sofia, E-mail address: rado_tzv@tu-sofia.bg

Received: September 10, 2018

Reviewer: Prof. PhD Ivan Trendafilov

Clegg-ОПЕРАТОРИ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ И ДИФЕРЕНЦИРАНЕ. ОБОБЩЕНО Reset-УПРАВЛЕНИЕ - част 1

Емил Николов

Резюме: В тази работа е проучен, изследван и анализиран **Clegg**-интегратор с алгоритъм за нулиране и инвертиране. Неговите потенциални предимства са доказани, когато се използва в индустриалните системи за управление. Предложени са нови линейни **ML-Clegg**-оператори за интегриране и диференциране, метод и критерий за структурната им конфигурация. Разработени и изследвани са **Reset-ML**-регулатори и **Reset-ML**-системи за управление.

Ключови думи: Линейни **ML-Clegg**-оператори за интегриране и диференциране, **Reset-ML**-регулатори, Качество на **Reset-ML**-системи за управление.

Clegg- OPERATORS FOR INTEGRATION AND DIFFERENTIATION. GENERALIZED Reset-CONTROL - part 1

Emil Nikolov

Abstract: In this work, a researched and analyzed **Clegg**-integrator with a reset mechanism has been explored. Its potential advantages have been proven, when used in the industrial control systems. A new linear **ML-Clegg** operators for integration and differentiation are proposed, a method and criterion for its structural configuration. **Reset-ML-Controllers** and **Reset-ML-Control Systems** have been developed and researched.

Key words: Linear **ML-Clegg** operators for integration and differentiation, **Reset-ML-Controllers**, Quality of **Reset-ML-Control System**

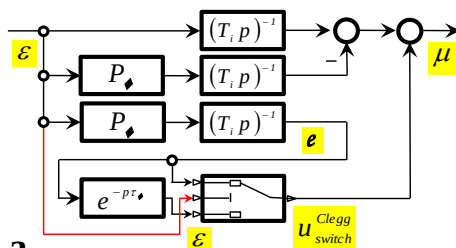
ВЪВЕДЕНИЕ

Известна е стратегията за **Reset**-управление, основано на **Clegg**-интегриране. Идеята е създадена и разработена от **J. C. Clegg** [9] и се състои в използването на нелинеен **Clegg**-интегратор за разширяване на функционалните възможности на алгоритмите за управление, основаващи се на оператори за интегриране от пълен ред. Ефективността на **Reset-системите** за управление се изразява в минимизация на пререгулиранятия в преходните процеси при управление на обекти със закъснение. Така значително се намалява времето на регулиране, увеличават се запасите на устойчивостта на **Reset-системите** в сравнение с тези на традиционните системи. Поради доказаната им ефективност, **Reset-системите** за управление са обект на активни изследвания в редица публикации на водещи автори от десетина години насам [1 ÷ 10]. Настоящата разработка си поставя за цел изследване на характеристиките на нелинейния **Clegg**-интегратор и разработката на функционално-апроксимиращ неговите свойства линеен **Clegg**-ин-

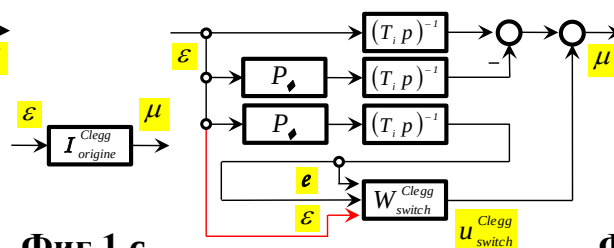
тегратор с изпълнение на задачите за времеви и честотен анализ в изследването и адекватно проектиране на линеен апроксимант с времеви и честотен анализ на функционалните му възможности. Разработката е представена в две неразделни части. Първата разглежда резултатите от изследването на нелинейни **Clegg-интегратор** и **PI-Clegg-регулятор** и на ефекта от приложението им в **Reset-системи** за управление; възможността за създаването на линеен **ML-Clegg-интегратор**, изследването на линеен **ML-Clegg-интегратор**, **ML-PI-Clegg-регулятор** и тяхното приложение в **Reset-системи**. Втората част включва резултатите от изследването на линеен **ML-Clegg-диференциатор**, **ML-ID-Clegg-** и **ML-PID-Clegg-регулатори** и тяхното приложение в **Reset-системи**.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА НЕЛИНЕЙНИ Clegg-ИНТЕГРАТОР И PI-Clegg-РЕГУЛАТОР

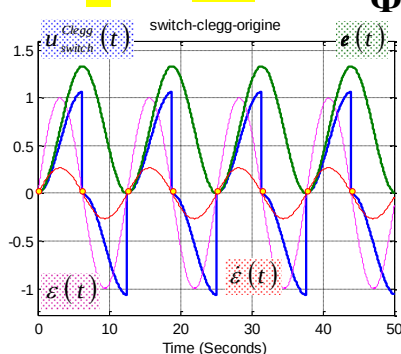
За разлика от традиционния интегратор от пълен първи ред с времеконстанта T_i , структурата [9] на **Clegg-интегратора** (фиг.1), съдържа: $P_\bullet$ -модул на **Reset**-фактора за изходно нулиране и симетрична инверсия на реакцията на традиционния интегратор на отрицателните полувърли при хармоничен вход; $e^{-p\tau_\bullet}$ -модул **Reset**-закъснение $\tau_\bullet$ (**Reset**-честота $\omega_\bullet$); W_{switch}^{Clegg} -нелинеен **Reset**-ключ, логически управляем от входния сигнал ε на **Clegg-интегратора**. Преходни хармонични и тестови характеристики на **Reset**-ключа W_{switch}^{Clegg} и на **Clegg-интегратора** $I_{original}^{Clegg}$ (1) са показани на фиг.2 и на фиг.3. Преходната функция на $I_{original}^{Clegg}$ съвпада с тази на традиционния интегратор I , а негови преходни характеристики на тестови сигнали (сравнени с тези на I) са показани на фиг.3. Последните са функция на параметрите $P_\bullet$ и $\tau_\bullet$ на **Clegg-интегратора** (при постоянна T_i). Структурата на **PI-Clegg-регулатор** (2) с параметри $k_p, T_i, \tau_\bullet, P_\bullet$ от фиг.4 е с характеристики, показани на фиг.5. Преходната функция на $\Phi I_{original}^{Clegg}$ съвпада с тази на традиционния **PI**-регулатор. Неговите преходни характеристики на тестови сигнали (паралелно с тези на традиционния **PI**-регулатор) са показани на фиг.5. Последните са функция на параметрите $P_\bullet$ и $\tau_\bullet$ на **Clegg-интегратора** (при постоянни k_p, T_i).



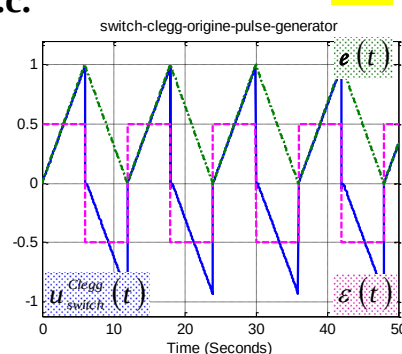
Фиг.1.а.



Фиг.1.б.

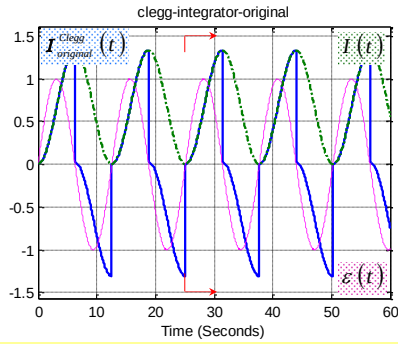


Фиг.2.а.

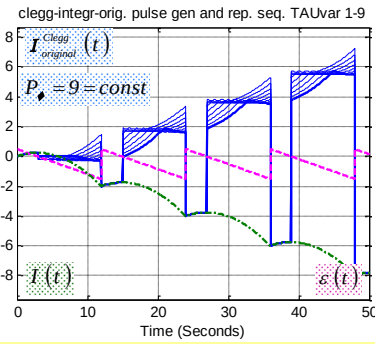


Фиг.2.б.

Фиг.3.а.



Фиг.3.б.



$$u_{switch}^{Clegg}(t) = \begin{cases} e(t), & (\dot{e}(t) > 0) \\ 0, & (\dot{e}(t) = 0) \\ -e(t), & (\dot{e}(t) < 0) \end{cases} \quad (1.a)$$

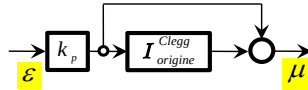
$$W_{switch}^{Clegg}(p, \tau_\bullet) = W_{sw} e^{-p\tau_\bullet} \quad (1.b)$$

$$I_{original}^{Clegg}(p, T_i, \tau_\bullet, P_\bullet) = (T_i p)^{-1} (1 + P_\bullet (W_{switch}^{Clegg} - 1)) \quad (1.c)$$

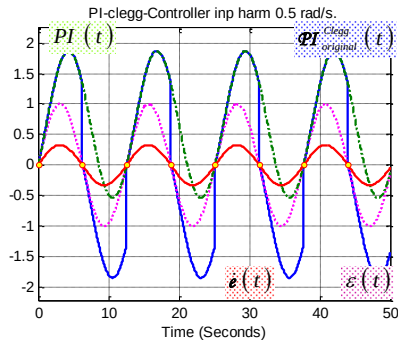
$$\Phi I_{original}^{Clegg}(p) = k_p (1 + I_{original}^{Clegg}(p, T_i, \tau_\bullet, P_\bullet)) \quad (2)$$

$$G(p) = k (Tp + 1)^{-1} e^{-p\tau} = 0.7235 (4p + 1)^{-1} (9p^2 + 3p + 1)^{-1} \quad (3)$$

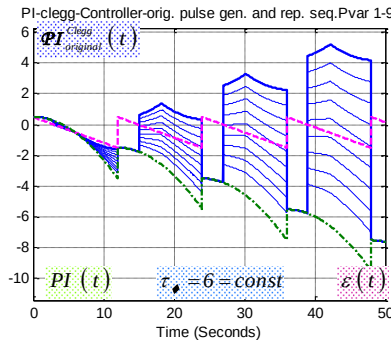
Фиг.4.



Фиг.5.а.



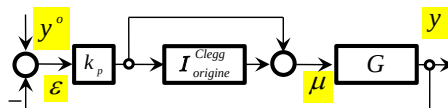
Фиг.5.б.

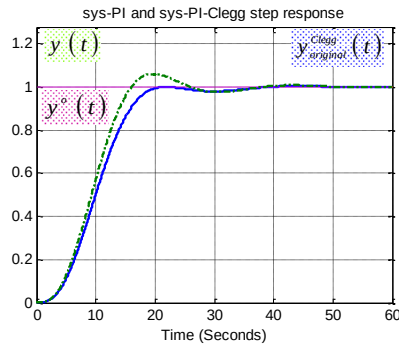


ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕФЕКТА ОТ ПРИЛОЖЕНИЕ НА *Reset*-СИСТЕМИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ С *PI-Clegg*-РЕГУЛАТОР

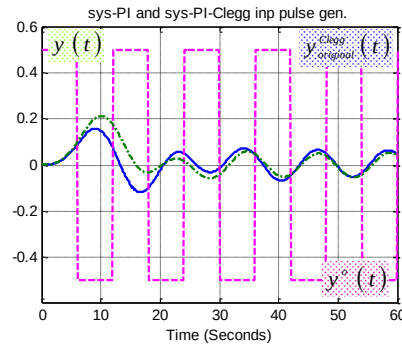
Ефектът от приложението на *Reset-cистемите* за управление (фиг.6) на примерен обект G (3) с *PI-Clegg*-регулатор $\Phi I_{original}^{Clegg}$ (2) е илюстриран на фиг.7, фиг.8 (паралелно в сравнителен план със система с традиционен *PI*-регулатор при едни и същи други условия). Очевидната осезаема минимизация на пререгулиранията в преходните процеси $y_{original}^{Clegg}(t)$ на *Reset-cистемата*, в сравнение с пререгулиранията на традиционната, се дължи на управлението на *PI-Clegg-регулатора* $\Phi I_{original}^{Clegg}$. Използването на нелинеен *Clegg-интегратор* $I_{original}^{Clegg}(P_\bullet, \tau_\bullet)$ в структурата на *PI-Clegg*-алгоритми $\Phi I_{original}^{Clegg}(k_p, T_i, P_\bullet, \tau_\bullet)$ за управление е ефективен подход за едновременно подобряване и на честотни, и на времеви количествени показатели на качеството на *Reset-cистемите* за управление.

Фиг.6.





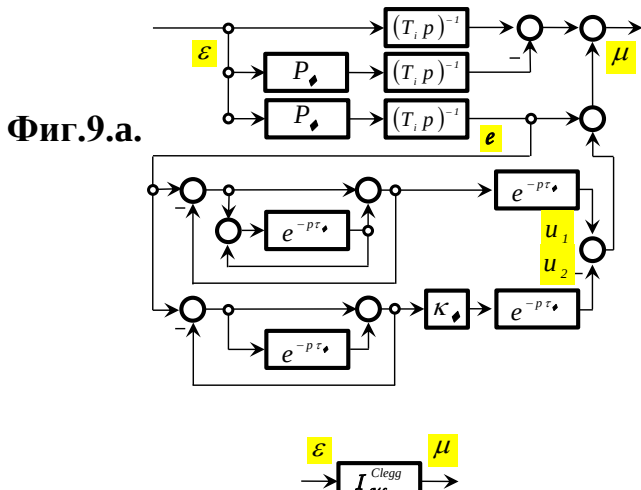
Фиг.7.



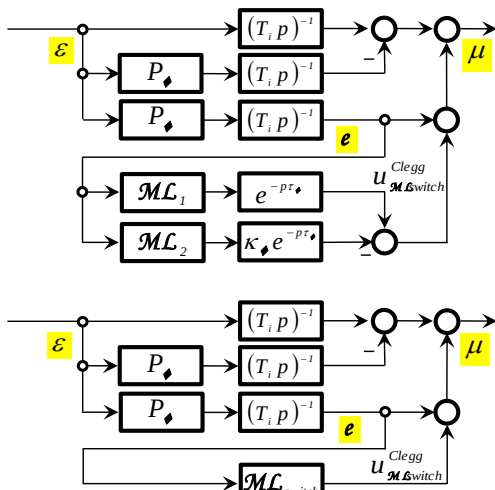
Фиг.8.

ЛИНЕЕН $\mathcal{ML}$ -Clegg-ИНТЕГРАТОР

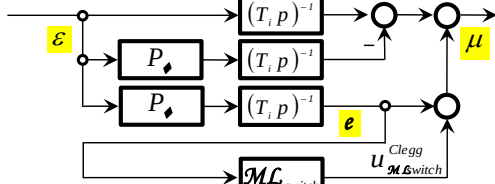
В настоящата разработка се предлага нова структура на линеен аналогов **Reset**-ключ $\mathcal{ML}_{switch}$ (който функционално апроксимира нелинейния w_{switch}^{Clegg}), управляем от променливата ε на линеен $\mathcal{ML}$ -Clegg-интегратор (фиг.9). Линейният **Reset**-ключ $\mathcal{ML}_{switch}$ се състои от два линейни модула с памет $\mathcal{ML}_1$ (4) и $\mathcal{ML}_2$ (5) [11,12] с модели на закъснение ($e^{-p\tau_{\mathcal{ML}_1}}$ и $e^{-p\tau_{\mathcal{ML}_2}}$, $\tau_{\mathcal{ML}_1} = \tau_{\mathcal{ML}_2}$) и коефициент $\kappa_\bullet$ на модула на **Reset**-фактора. Структурата (фиг.9) на предложения **Reset**-ключ $\mathcal{ML}_{switch}$ (6) гарантира честотната му характеристика да притежава свойствата на лентов филтър с „вертикална“ фазочестотна характеристика на аналогов ключ, който функционално да апроксимира w_{switch}^{Clegg} (1.a,b) по схемата на фиг.9. Времевите и честотни характеристики на модулите с памет $\mathcal{ML}_1$ (4), $\mathcal{ML}_2$ (5) и на линейния ключ $\mathcal{ML}_{switch}$ (6) са показани съвместно на фиг.10. Функционалните характеристики на линейния **Reset**-ключ $\mathcal{ML}_{switch}$ (6) са показани на фиг.11 в паралел с тези на нелинейния **Reset**-ключ w_{switch}^{Clegg} (1.a,b) за едни и същи условия



Фиг.9.d.



Фиг.9.b.



Фиг.9.c.

$$\mathcal{ML}_1 = (2 - e^{-p\tau_\bullet})^{-1} \quad (4)$$

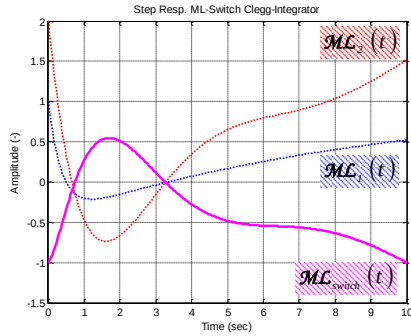
$$\mathcal{ML}_2 = (1 + e^{-p\tau_\bullet}) (2 - e^{-p\tau_\bullet})^{-1} \quad (5)$$

$$\mathcal{ML}_{switch}(\kappa_\bullet, \tau_\bullet) = \mathcal{ML}_1 e^{-p\tau_\bullet} + \mathcal{ML}_2 \kappa_\bullet e^{-p\tau_\bullet} = \frac{(1 - \kappa_\bullet) e^{-p\tau_\bullet} - \kappa_\bullet e^{-2p\tau_\bullet}}{(2 - e^{-p\tau_\bullet})} \quad (6)$$

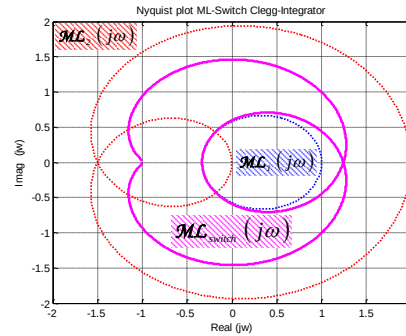
$$I_{p \mathcal{ML}}^{1 Clegg} \varepsilon(p) = (T_i p)^{-1} f_{\mathcal{ML}}(\varepsilon) \quad (7.a)$$

$$I_{\mathcal{ML}}^{Clegg} x(t) = T_i^{-1} \int_0^t f_{\mathcal{ML}}(x) x(t) dt \quad (7.b)$$

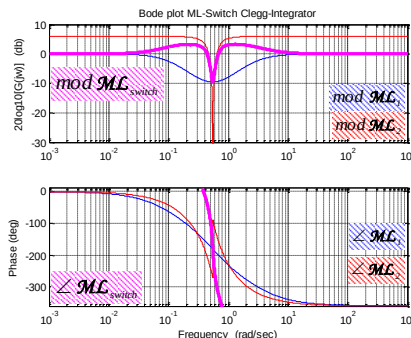
$$I_{\mathcal{ML}}^{Clegg}(p, T_i, \kappa_\bullet, \tau_\bullet, P_\bullet) = (T_i p)^{-1} \left(1 + P_\bullet \frac{((1 - \kappa_\bullet) e^{-p\tau_\bullet} - \kappa_\bullet e^{-2p\tau_\bullet})}{(2 - e^{-p\tau_\bullet})} \right) \quad (7.c)$$



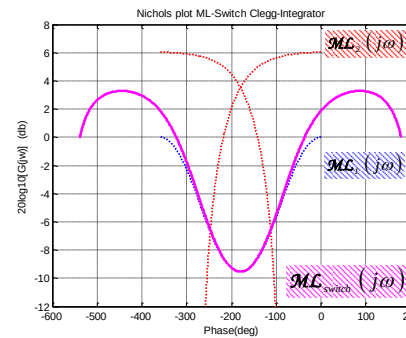
Фиг.10.а.



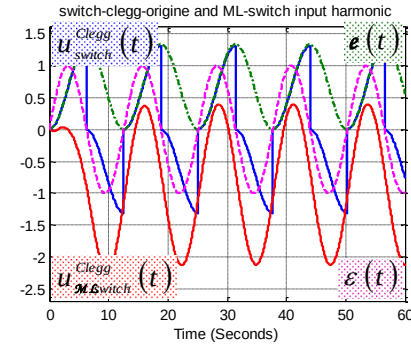
Фиг.10.б.



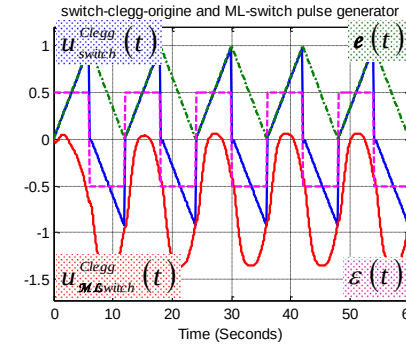
Фиг.10.с.



Фиг.10.д.



Фиг.11.а.

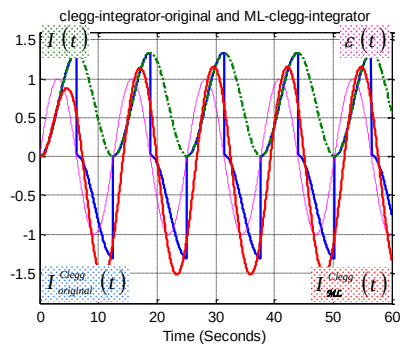


Фиг.11.б.

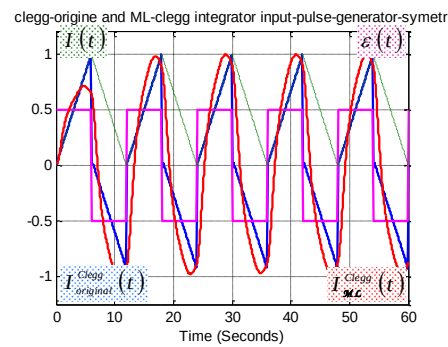
В работата се предлага и линеен **ML-Clegg-интегратор** $I_{\mathcal{ML}}^{Clegg}$ (7.a,b), структурно конфигуриран (фиг.9) с помощта на **Reset**-ключа $\mathcal{ML}_{switch}$ (6), (7.c). Неговите характеристики са визуализирани в паралел с тези на нелинейния **Clegg-интегратор** $I_{original}^{Clegg}$ (1.c) при еднакви условия на фиг.12. Съществуващата разлика (8) (основана на отчети от фиг.12.) между $I_{original}^{Clegg}$ и $I_{\mathcal{ML}}^{Clegg}$ е показана на фиг.13.

С цел минимизиране на разликата (8) между характеристиките на **ML-Clegg-интегратор** $I_{\mathcal{ML}}^{Clegg}$ (7) и тези на $I_{original}^{Clegg}$ (1.c), в работата се предлага и се използва при (синтеза) структурната конфигурация (фиг.9) **методът на °функционална хармонична апроксимация°** при **критерий °равенство на площите°** (9), (10) в реакциите на $I_{\mathcal{ML}}^{Clegg}$ и на $I_{original}^{Clegg}$ при хармоничен вход. Неговият физически смисъл е показан върху фрагмент от фиг.12, илюстриран на фиг.14.

Фиг.12.а.



Фиг.12.б.



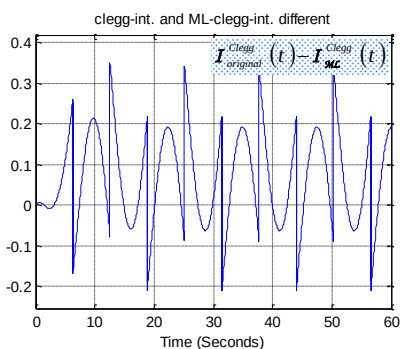
$$I_{ML}^{Clegg}(t) - I_{original}^{Clegg}(t) \rightarrow \min \quad (8)$$

$$\int_t I_{ML}^{Clegg}(t) dt - \int_t I_{original}^{Clegg}(t) dt = S_{ML}^{Clegg}(t) - S_{original}^{Clegg}(t) \rightarrow \min \quad (9)$$

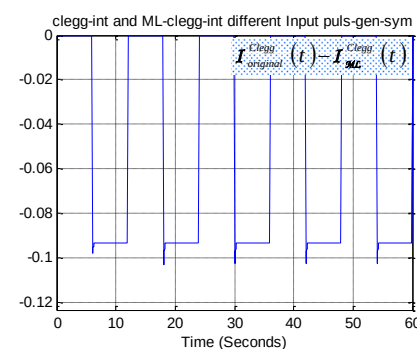
$$\sum_t S_{ML}^{Clegg}(t) = \sum_t S_{original}^{Clegg}(t) \quad (10)$$

$$\mathcal{P}I_{ML}^{Clegg}(p) = k_p (1 + I_{ML}^{Clegg}(p, T_i, \kappa_\diamond, \tau_\diamond, P_\diamond)) \quad (11)$$

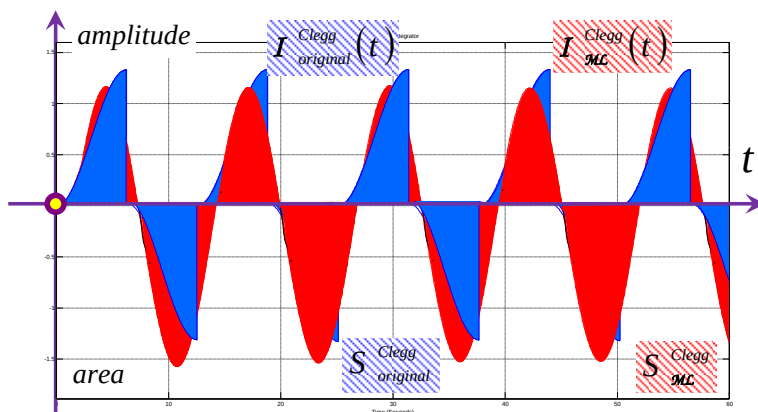
Фиг.13.а.



Фиг.13.б.



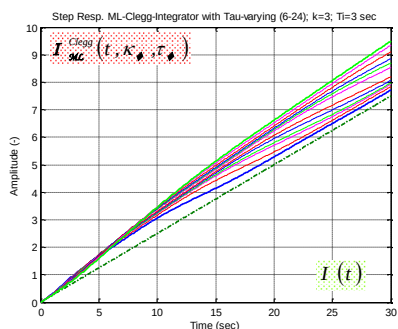
Фиг.14.



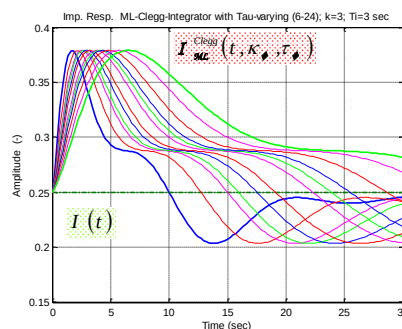
ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЛИНЕЕН ML -Clegg-ИНТЕГРАТОР

Времевите и честотните характеристики на линейния ML -Clegg-интегратор I_{ML}^{Clegg} (7) от фиг.9, са визуализирани във функция от динамични параметри $\kappa_\diamond, \tau_\diamond$ и в паралел с тези на традиционния интегратор I от пълен първи ред за едни и същи условия ($k_p=1; T_i=3sec$) на фиг.15.

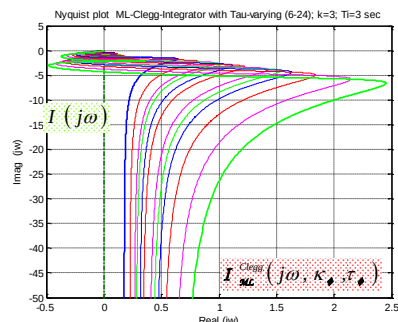
Фиг.15.а.



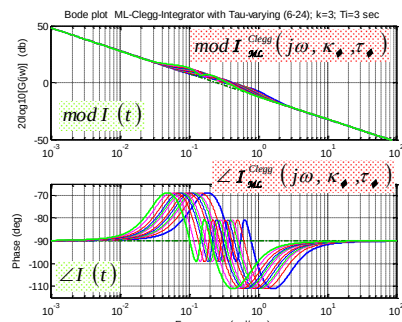
Фиг.15.б.



Фиг.15.с.



Фиг.15.д.



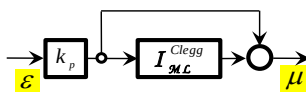
ЛИНЕЕН ML - PI -Clegg-РЕГУЛАТОР

Структурата на линейен ML - PI -Clegg-регулятор (11), предложен в настоящата работа, е показана на фиг.16. Тя се основава на ML -Clegg-оператора за интегриране I_{ML}^{Clegg} (7). Характеристиките на ML - PI -Clegg-регулятора PI_{ML}^{Clegg} (11) са показани на фиг.17 паралелно с тези на PI -Clegg-регулятора (2) и на традиционния PI -регулятор, в сравнителен план при едни и същи условия (k_p, T_i) и тестови хармонични и модални входни сигнали ε .

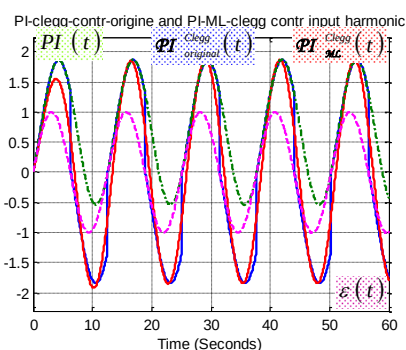
На фиг.18 е представен параметрично линейният ML - PI -Clegg-регулятор (11) във функция от динамични параметри $\kappa_\bullet, \tau_\bullet$ и в паралел с традиционния PI -регулятор.

Очевидно е, че увеличаването на традиционния брой на параметри k_p, T_i с $\kappa_\bullet, \tau_\bullet, P_\bullet$ разширява функционалните възможности на линейния ML - PI -Clegg-регулятор (11) за приложение в системите за управление в сравнение с традиционния PI -регулятор.

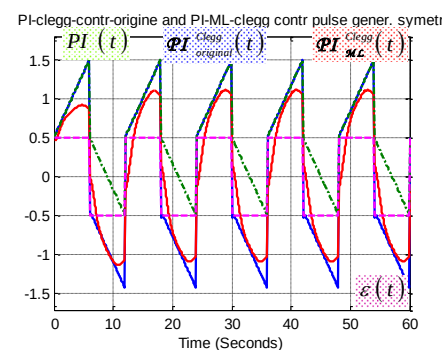
Фиг.16.



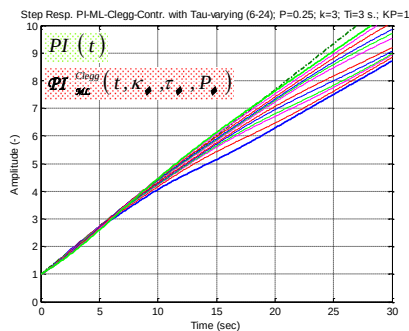
Фиг.17.а.



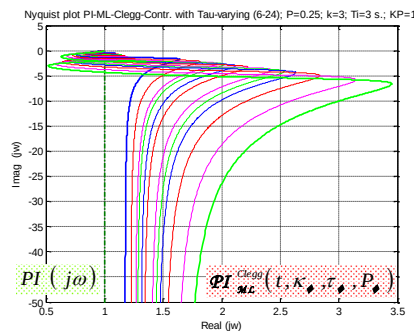
Фиг.17.б.



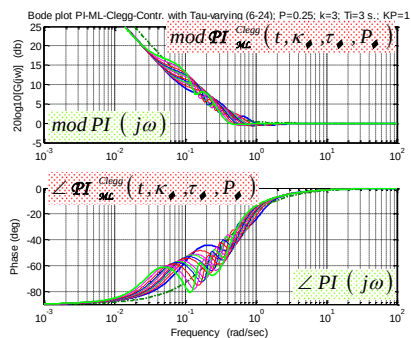
Фиг.18.а.



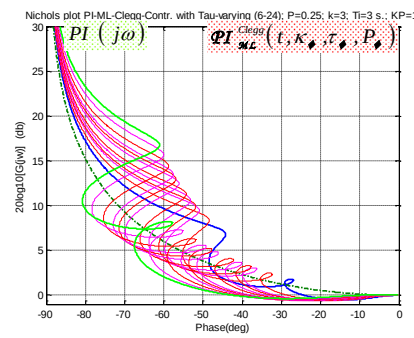
Фиг.18.б.



Фиг.18.с.



Фиг.18.д.

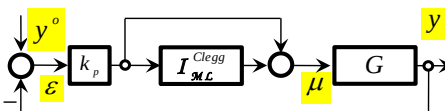


ЛИНЕЙНА *Reset*-СИСТЕМА ЗА УПРАВЛЕНИЕ С *ML-PI-Clegg*-РЕГУЛАТОР

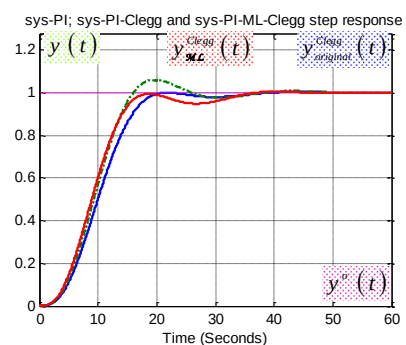
Структурата (фиг.19) на линейна *Reset-система* за управление на примерен обект G (3) се основава на разработения *ML-PI-Clegg*-регулатор (11), конфигуриран по *метода на °функционална хармонична апроксимация°* при *критерий °равенство на площите°* (9), (10). Времетровите и честотните характеристики (фиг.20 ÷ фиг.22) на предложената линейна *Reset-система* (фиг.19) в сравнение с тези на нелинейната *Reset-система* (на фона на традиционната система с *PI*-регулатор) доказват:

- изпълнението изискванията на *критерия °равенство на площите°* по използвания *метод на °функционална хармонична апроксимация°* при нейната структурна конфигурация. Очевидно е достигането на изискването за минимизация на разликите между регулируемите променливи y_{ML}^{Clegg} и $y_{original}^{Clegg}$;
- постигането с помощта на линеен алгоритъм (11) на желания ефект от осезаема минимизация на пререгулиранятия в преходните процеси $y_{ML}^{Clegg}(t)$ на *Reset-системата*, за разлика от традиционната $y(t)$, което се дължи на управлението μ_{ML}^{Clegg} на *ML-PI-Clegg*-регулатора (11).

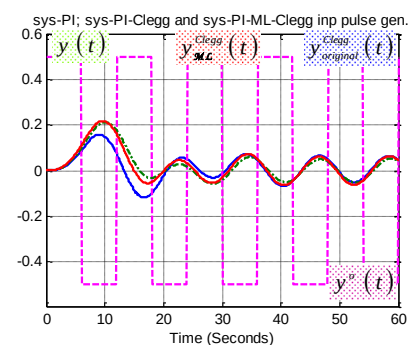
Фиг.19.

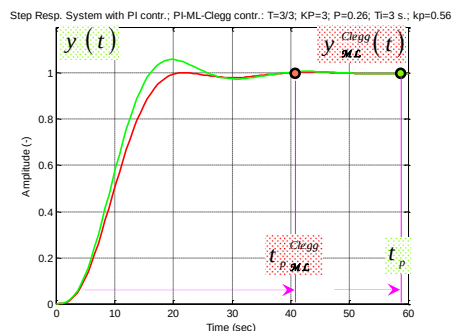


Фиг.20.

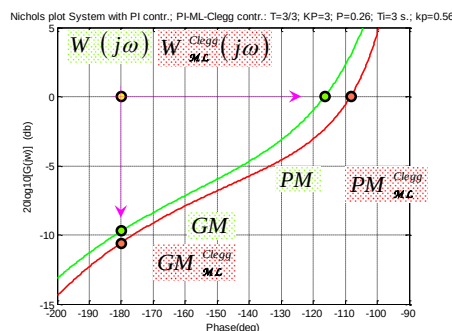


Фиг.21.





Фиг.22.а.



Фиг.22.б.

Нещо повече. Сравнителният анализ на свойствата на линейната **Reset**-система (фиг.19), определени от нейните характеристики (фиг.22), определя съотношенията и на времевите, и на честотните количествени показатели на качеството (време на регулиране $y_{p \text{ ML}}^{\text{Clegg}}$, степен на демпфиране на пререгулирането $\sigma_{\text{ML}}^{\text{Clegg}}$, запаси на устойчивостта по модул $GM_{\text{ML}}^{\text{Clegg}}$ и по фаза $PM_{\text{ML}}^{\text{Clegg}}$) на сравняваните **Reset**-и традиционна системи.

Съотношенията (12)÷(14) еднозначно определят и доказват: ■ превъзходството на качеството на **Reset-системите** пред това на традиционните системи, отразено със съответните количествени показатели; ■ ефективността и приложимостта на предлаганите в настоящата разработка: линейни **Reset**-ключ $\text{ML}_{\text{switch}}$ (6), **ML-Clegg-интегратор** $I_{\text{ML}}^{\text{Clegg}}$ (7.с) и **ML-PI-Clegg-регулатор** (11); ■ приложимостта на предложения **метод на функционална хармонична апроксимация** при критерий **равенство на площите** (9), (10) в реакциите на $I_{\text{ML}}^{\text{Clegg}}$ и на $I_{\text{original}}^{\text{Clegg}}$ при хармоничен вход за структурната конфигурация на **ML-Clegg-интегратора** $I_{\text{ML}}^{\text{Clegg}}$ (7.с).

$$t_{p \text{ ML}}^{\text{Clegg}} \ll t_p, (\sigma_{\text{ML}}^{\text{Clegg}} \rightarrow 0) \quad (12)$$

$$GM_{\text{ML}}^{\text{Clegg}} \gg GM \quad (13)$$

$$PM_{\text{ML}}^{\text{Clegg}} \gg PM \quad (14)$$

ДИСКУСИЯ И ИЗВОДИ

Новото и оригинално в тази част на настоящата разработка се състои в:

- анализът на свойствата на нелинейния **Clegg-интегратор** [9] и ефекта от приложението на **Reset-система** за управление с **PI-Clegg-регулатор**;
- разработените: линеен **Reset**-ключ, притежаващ свойствата на лентов филтър с „вертикална“ фазочестотна характеристика на аналогов ключ, който функционално апроксимира нелинейния **Reset-ключ**; линейни **ML-Clegg-интегратор** и **ML-PI-Clegg-регулатор**;
- предложеният **метод на функционална хармонична апроксимация** при критерий **равенство на площите** за структурната конфигурация на **ML-Clegg-интегратора**;

■ анализът и доказателство превъзходството на качеството на **Reset-системите** пред това на традиционните системи, отразено със съответните количествени показатели и на ефекта от приложението на **Reset-системите** за управление на обекти със закъснение;

■ приложението на разработените в [11,12] **МЛ-модули** с памет за репетитивни системи за целите на създаването на линейния **Reset-ключ**.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Baños, A. Barreiro (2012), *Reset Control Systems*, in: Advances in Industrial Control, © 2012 Springer, ISBN-10: 144712216X, ISBN-13: 978-1447122166, 348 p.
- [2] A. Baños, A. Vidal (2012), *Design of reset control systems: the PI-CI compensator*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, © 2012 American Society of Mechanical Engineers, ISSN:0022-0434, Vol 134 (5) (2012), pp. 310-380
- [3] A. Baños, J. Carrasco, A. Barreiro (2011), *Reset Times-Dependent Stability of Reset Control Systems*, IEEE Trans. Autom. Control 56 (1) (2011) pp. 217-223
- [4] A. Barreiro, A. Baños (2012), *Sistemas de Control basados en Reset*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, © 2012 Elsevier, ISSN: 1697-7912, Vol 9 (2012) 329-346
- [5] C. V. Holot (1997), *Revisiting Clegg Integrators: Periodicity, Stability and IQCs*, System Structure and Control, © 1997 IFAC Bucharest, Romania, 1997, pp. 31-38
- [6] D. Nesic, L. Zaccarian, A.R. Teel (2008), *Stability Properties of Reset Systems*, Automatica, © 2008 Elsevier, ISSN: 0005-1098, 4 (8) (2008) pp. 2019-2026
- [7] Guo Y., W. Gui, Ch. Yang, L. Xie (2010), *Stability Analysis and Design of Reset Control Systems with Discrete-Time Triggering Conditions*, Automatica, © 2010 Elsevier, ISSN: 0005-1098, Vol 48 (2010), pp. 528-535
- [8] Guo Y., Wang Y., Xie L., Zheng J. (2009), *Stability Analysis and Design of Reset Systems: Theory and an Application*, Automatica, © 2009 Elsevier, Vol 45 (2), pp. 492-497
- [9] J. C. Clegg (1958), *A nonlinear Integrator for Servomechanisms*, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers 11 (1958), Part II: Applications and Industry, © 1958 IEEE, Volume: 77, Issue: 1, March 1958, pp. 41- 42
- [10] M. A. Davó, A. Baños (2016), *Reset Control of Integrating Plus Dead Time Processes*, Journal of Process Control, © 2016 Elsevier, ISSN: 0959-1524, Vol. 38 (2016) pp. 22-30
- [11] Nikolova N., Nikolov E. (2008), *МЛ-Structures in the Repetitive Robust Control Systems*, Journal Cybernetics and Information Technologies Journal, © 2008 Bulgarian Academy of Science, ISSN 1311–9702, Vol. 8 (2008), No 1, pp. 44-64
- [12] Nikolova N., Nikolov E. (2013), *Absorptive Repetitive Filters with Operators of Generalized Fractional Calculus*, Journal Cybernetics and Information Technologies, © 2013 Bulgarian Academy of Science, ISSN 1311–9702, Vol. 12 (2013), No X, pp. 21-32

Автор: Емил Николов, проф. дтн, катедра „Автоматизация на Непрекъснатите Производства“, Факултет Автоматика, Технически Университет - София; E-mail address: nicoloff@tu-sofia.bg

Постъпила на 29.10.2018 г.

Рецензент: чл. кор. проф. дтн. Петко Петков

ML-Clegg-ОПЕРАТОРИ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ И ДИФЕРЕНЦИРАНЕ. ОБОБЩЕНО Reset-УПРАВЛЕНИЕ - част 2

Емил Николов

Резюме: В тази работа е проучен, изследван и анализиран **Clegg**-интегратор с алгоритъм за нулиране и инвертиране. Неговите потенциални предимства са доказани, когато се използва в индустриалните системи за управление. Предложени са нови линейни **ML-Clegg**-оператори за интегриране и диференциране, метод и критерий за структурната им конфигурация. Разработени и изследвани са **Reset-ML**-регулатори и **Reset-ML**-системи за управление.

Ключови думи: Линейни **ML-Clegg**-оператори за интегриране и диференциране, **Reset-ML**-регулатори, Качество на **Reset-ML**-системи за управление.

ML-Clegg- OPERATORS FOR INTEGRATION AND DIFFERENTIATION. GENERALIZED Reset-CONTROL - part 2

Emil Nikolov

Abstract: In this work, a researched and analyzed **Clegg**-integrator with a reset mechanism has been explored. Its potential advantages have been proven, when used in the industrial control systems. A new linear **ML-Clegg** operators for integration and differentiation are proposed, a method and criterion for its structural configuration. **Reset-ML**-Controllers and **Reset-ML**-Control Systems have been developed and researched.

Key words: Linear **ML-Clegg** operators for integration and differentiation, **Reset-ML**-Controllers, Quality of **Reset-ML**-Control System

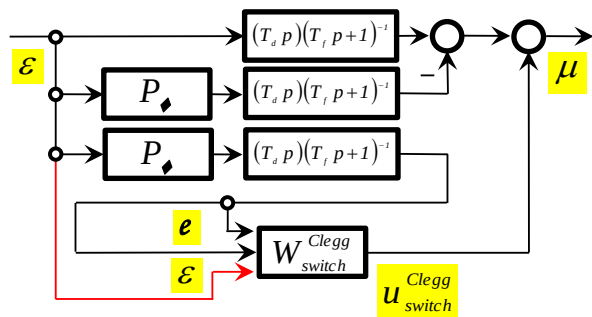
ВЪВЕДЕНИЕ

Разработката е представена в две неразделни части. Първата разглежда резултатите от изследването на нелинейни **Clegg**-интегратор и **PI-Clegg**-регулатор и на ефекта от приложението им в **Reset-системи** за управление; възможността за създаването на линеен **ML-Clegg**-интегратор, изследването на линеен **ML-Clegg**-интегратор, **ML-PI-Clegg**-регулатор и тяхното приложение в **Reset**-системи. Настоящата втората част включва резултатите от изследването на линеен **ML-Clegg**-диференциатор, **ML-ID-Clegg**- и **ML-PID-Clegg**-регулатори и тяхното приложение в **Reset-системи**.

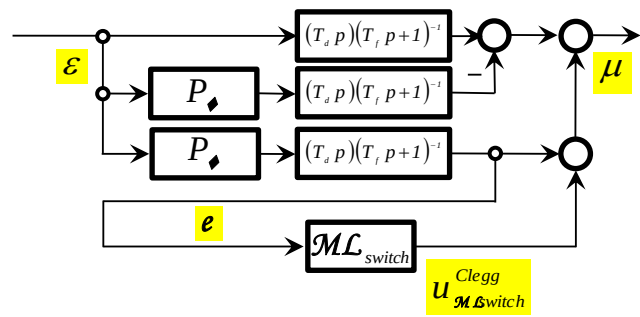
Clegg-ДИФЕРЕНЦИАТОРИ

По аналог на разгледаните **Clegg**-интегратори (1.с) ÷ (7), настоящата разработка предлага създаването на **Clegg**- и **ML-Clegg**-диференциатори (фиг.23). Структу-

рата на нелинейният **Clegg-диференциатор** Φ^{Clegg} е показана на фиг.23.a. - в съответствие с тази от фиг.1.



Фиг.23.a.



Фиг.23.b.

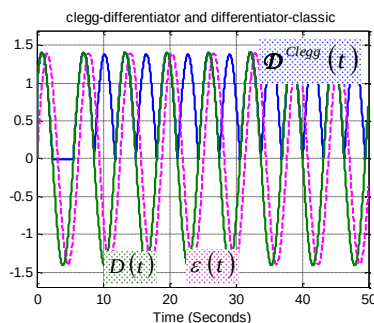
Аналитичното описание на нелинейния **Clegg-диференциатор** Φ^{Clegg} (15) (T_d - времеконстанта и T_f - филтър) отчита зависимостите (1.a), (1.b) с: P_Δ ; $e^{-p\tau_\Delta}$, τ_Δ , ω_Δ и W^{Clegg}_{switch} - нелинейния **Reset**-ключ.

Аналитичното описание на линейния (фиг.23.b) **ML-Clegg-диференциатор** Φ^{Clegg} (16), конфигуриран по структурата на фиг.23.b с линеен **Reset**-ключ ML_{switch} (6), (7.c) от фиг.10, отчита зависимостите (4), (5), (6) с P_Δ , κ_Δ , τ_Δ . Времевите и честотните характеристики на предлаганите **Clegg**- и **ML-Clegg-диференциатори** са визуализирани във функция от динамичните параметри P_Δ , κ_Δ , τ_Δ и в паралел с тези на традиционния диференциатор D от пълен първи ред за едни и същи условия ($k_p=1$; $T_d=2sec$) на фиг.24.

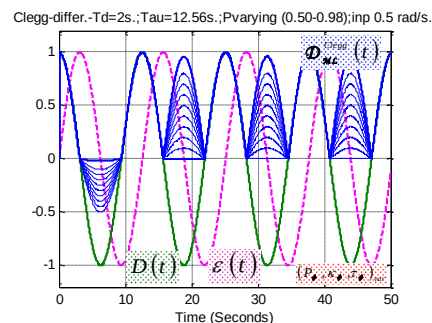
$$\Phi^{Clegg}(p) = (T_d p)(T_f p + 1)^{-1} (1 + P_\Delta (W^{Clegg}_{switch} - 1)) \quad (15)$$

$$\Phi^{Clegg}_{ML}(p) = (T_d p)(T_f p + 1)^{-1} (1 + P_\Delta ML_{switch}) \quad (16)$$

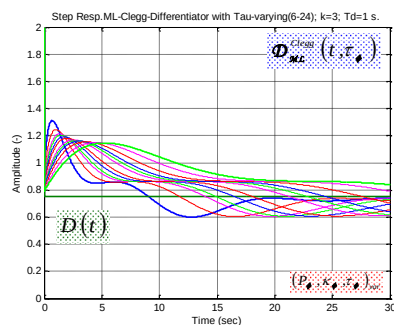
$$\Phi^{1Clegg}_{tML} \varepsilon(t) = T_d d(\varepsilon(t) f_{ML}(\varepsilon)) / dt \quad (17)$$



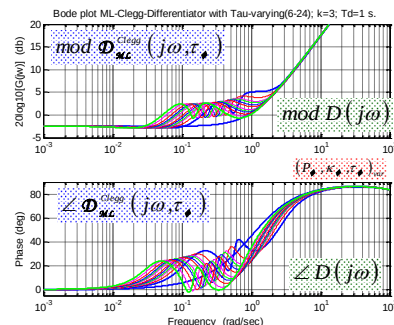
Фиг.24.a.



Фиг.24.b.

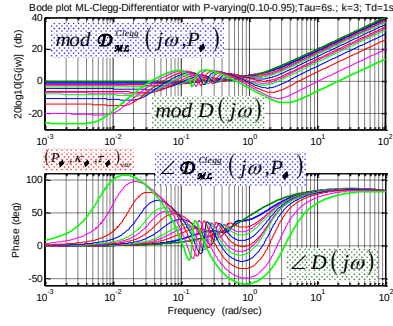


Фиг.24.c.

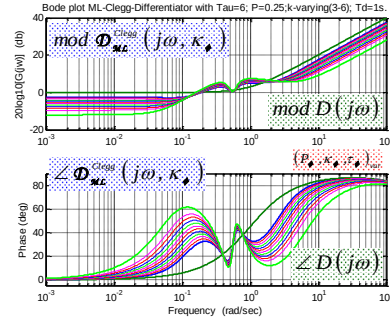


Фиг.24.d.

Фиг.24.е.



Фиг.24.ф.

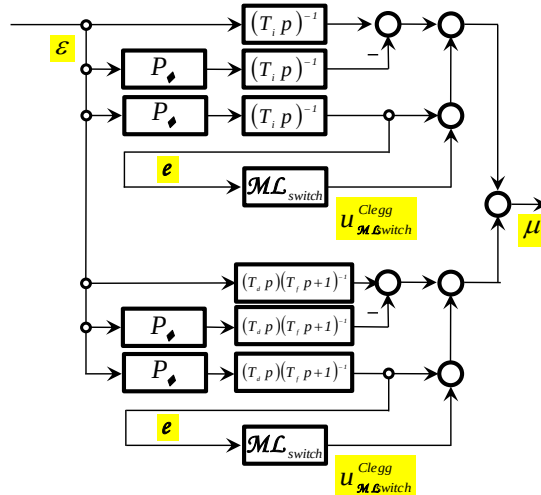


ЛИНЕЕН $\mathcal{ML}$ -ID-Clegg-РЕГУЛАТОР

Структурата на линеен $\mathcal{ML}$ -ID-Clegg-регулатор $(ID)_{\mathcal{ML}}^{Clegg}$ (18), предложен в настоящата работа, е показана на фиг.25. Неговите характеристики, паралелно с тези на традиционен ID-алгоритъм (19) са илюстрирани на фиг.26.

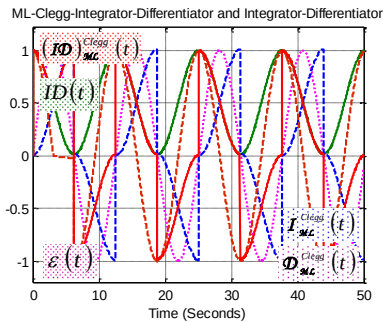
$$(ID)_{\mathcal{ML}}^{Clegg}(p, P_{\bullet}, \kappa_{\bullet}, \tau_{\bullet}) = ((T_d p)(T_f p + 1)^{-1} + (T_i p)^{-1})(1 + P_{\bullet} \mathcal{ML}_{switch}) \quad (18)$$

$$ID(p) = ((T_d p)(T_f p + 1)^{-1} + (T_i p)^{-1}) \quad (19)$$

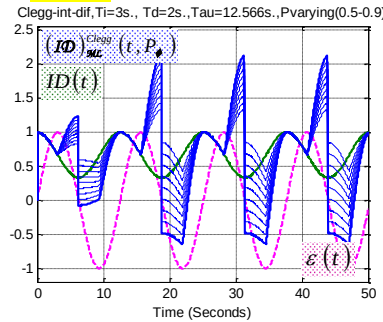


Фиг.25.

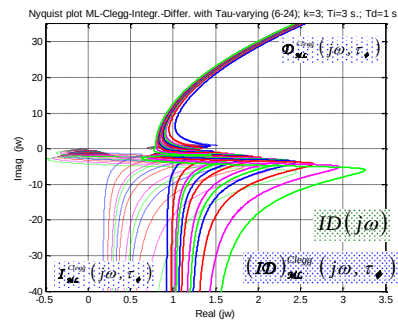
Фиг.26.а.



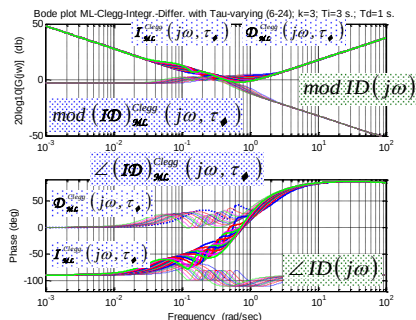
Фиг.26.б.



Фиг.26.с.



Фиг.26.д.

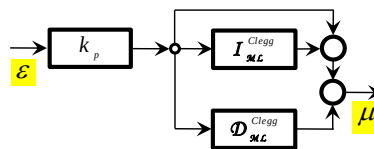


ЛИНЕЕН $\mathcal{ML}$ -PID-Clegg-РЕГУЛАТОР

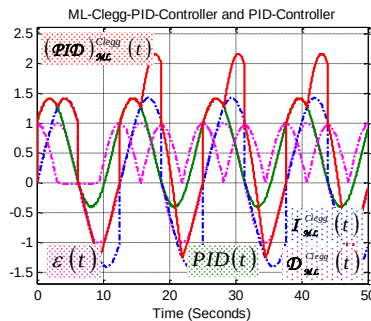
Структурата на линеен $\mathcal{ML}$ -PID-Clegg-регулятор $(\Phi\mathcal{D})_{\mathcal{ML}}^{\text{Clegg}}$ (20), предложен в настоящата работа, е показана на фиг.27, а неговите характеристики във функция от динамични параметри $P_{\bullet}, \kappa_{\bullet}, \tau_{\bullet}$, паралелно с тези на традиционен **PID**-алгоритъм (21) са илюстрирани на фиг.28.

$$(\Phi\mathcal{D})_{\mathcal{ML}}^{\text{Clegg}}(p, P_{\bullet}, \kappa_{\bullet}, \tau_{\bullet}) = k_p \left((T_d p) (T_f p + 1)^{-1} + (T_i p + 1) (T_i p)^{-1} \right) (1 + P_{\bullet} \mathcal{ML}_{\text{switch}}) \quad (20)$$

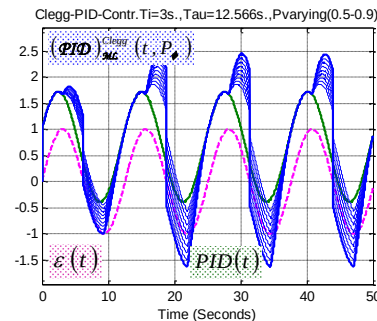
$$\text{PID}(p) = k_p \left((T_d p) (T_f p + 1)^{-1} + (T_i p + 1) (T_i p)^{-1} \right) \quad (21)$$



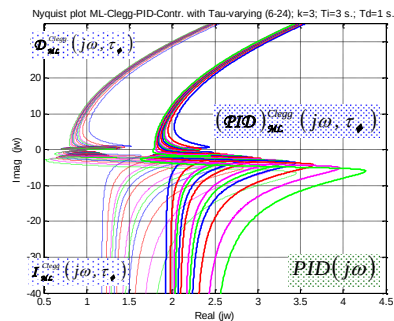
Фиг.27.



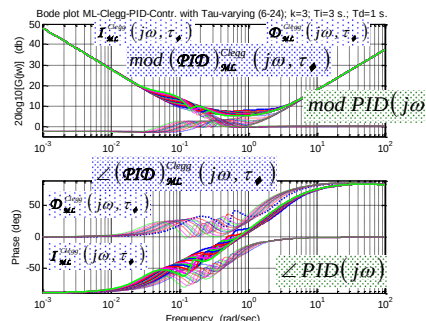
Фиг.28.a.



Фиг.28.b.



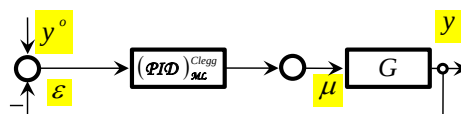
Фиг.28.c.



Фиг.28.d.

ЛИНЕЙНА Reset-СИСТЕМА ЗА УПРАВЛЕНИЕ С $\mathcal{ML}$ -PID-Clegg-РЕГУЛАТОР

Структурата на линейна **Reset-система** за управление на примерен обект G (3) с $\mathcal{ML}$ -PID-Clegg-регулятор $(\Phi\mathcal{D})_{\mathcal{ML}}^{\text{Clegg}}$ (20), конфигуриран по *метода на °функционална хармонична апроксимация°* при *критерий °равенство на площите°* (9), (10), е показана на фиг.29.



Фиг.29.

Показателните характеристики на линейната **Reset-система** (фиг.29) с $\mathcal{ML}$ -PID-Clegg-регулятор $(\Phi\mathcal{D})_{\mathcal{ML}}^{\text{Clegg}}$ (20), при динамични параметри за настройка (22)÷(24), позволяват да се определи ефектът от **Reset**-управлението с $(\Phi\mathcal{D})_{\mathcal{ML}}^{\text{Clegg}}$ (20).

$$\begin{aligned} Clegg_Diff \Rightarrow k_d = 0.25 ; T_d = 2 \text{ sec} ; T_f = 0.0001 \text{ sec} ; \\ P_{\blacklozenge d} = 0.2598 ; \tau_{\blacklozenge d} = 6.2831 \text{ sec} ; \omega_{\blacklozenge d} = 1 \text{ rad / sec} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Clegg_Int \Rightarrow k_i = 0.40 ; T_i = 3 \text{ sec} ; \\ P_{\blacklozenge i} = 0.0198 ; \tau_{\blacklozenge i} = 6.2831 \text{ sec} ; \omega_{\blacklozenge i} = 1 \text{ rad / sec} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} I_class \Rightarrow k_i = 0.50 ; T_i = 3 \text{ sec} \\ D_class \Rightarrow k_i = 0.10 ; T_d = 2 \text{ sec} \end{aligned} \quad (24)$$

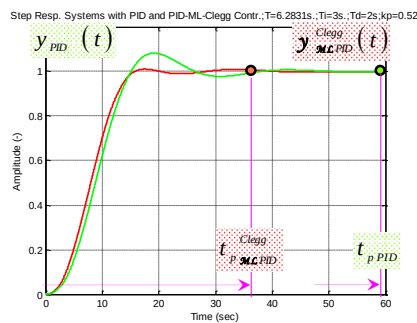
Сравнителният анализ на свойствата на линейната **Reset-система** (фиг.29) с $(PI\mathcal{D})_{ML}^{Clegg}$ и на традиционната **PID**-система, въз основа на техните характеристики (фиг.30), определя съотношенията и на времевите, и на честотните количествени показатели на качеството (време на регулиране $t_{p\ ML}^{Clegg}$, степен на минимизация на пререгулиране σ_{ML}^{Clegg} , запаси на устойчивостта по модул $\mathcal{GM}_{ML}^{Clegg}$ и по фаза $\mathcal{PM}_{ML}^{Clegg}$) на сравняваните **Reset**- и традиционна системи. Съотношенията (25) ÷ (27) еднозначно определят и доказват превъзходството на качеството на **Reset-системите** пред това на традиционните системи, отразено със съответните количествени показатели. Съществена е и разликата в управлението μ_{ML}^{Clegg} и μ_{PID} на двете затворени системи, показано със съответните времеви и честотни характеристики на фиг.30.b,c.. Видими са и намаленото време на регулиране, и критично-апериодичността без пререгулирания, и максималните динамични отклонения в μ_{ML}^{Clegg} за разлика от μ_{PID} .

$$t_{p\ ML}^{Clegg} \ll t_p, (\sigma_{ML}^{Clegg} \rightarrow 0) \quad (25)$$

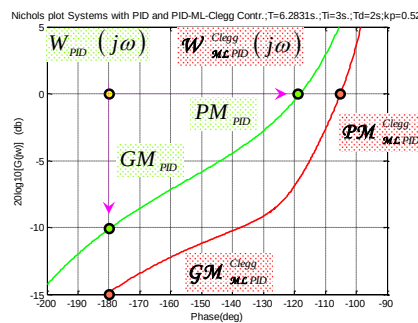
$$\mathcal{GM}_{ML}^{Clegg} \gg GM \quad (26)$$

$$\mathcal{PM}_{ML}^{Clegg} \gg PM \quad (27)$$

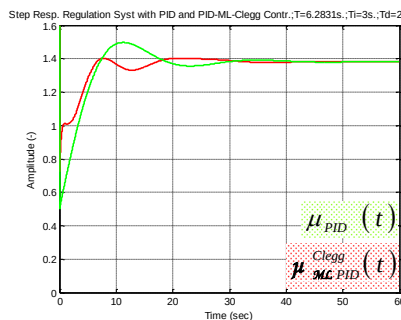
Фиг.30.а.



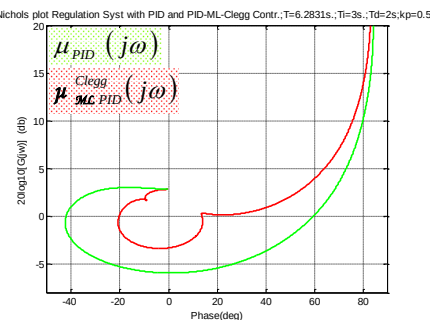
Фиг.30.б.



Фиг.30.с.



Фиг.30.д.



ДИСКУСИЯ И ИЗВОДИ

Изложеното и систематизираното в литературата [1 ÷ 12] и предложеното ново и оригинално в настоящата разработка дават основание да се дефинират нов клас ***ML-Clegg-оператори за интегриране*** (29) и ***за диференциране*** (31). Те се отличават от съответните традиционни оператори (28), (30) по наличието в тях на функцията $f_{ML}(e)$ (32) и чиято системна реализация е представена с разгледаните ***ML-Clegg-интегратор*** (7) и ***ML-Clegg-диференциатор*** (16), (17).

$$I_t^1 = T_i^{-1} \int_0^t x(t) dt ; I_p^1 = (T_i p)^{-1} , (p = i + j\omega) \quad (28)$$

$$I_{t,e}^{1 \text{ Clegg}} = T_i^{-1} \int_0^t (f_{ML}(e) x(t)) dt = T_i^{-1} \int_0^t x(t, e) dt ; I_{p,e}^{1 \text{ Clegg}} = (T_i p)^{-1} \quad (29)$$

$$D_t^1 = T_d d x(t)/dt ; D_p^1 = (T_d p) \quad (30)$$

$$\mathcal{D}_{t,e}^{1 \text{ Clegg}} = T_d d (f_{ML}(e) x(t))/dt = T_d d x(t, e)/dt ; \mathcal{D}_{p,e}^{1 \text{ Clegg}} = (T_d p) \quad (31)$$

$$f_{ML} = (1 + P_{\diamond} ML(\kappa_{\diamond}, \tau_{\diamond})) = f_{ML}(e) \quad (32)$$

Основните свойства на ***ML-Clegg-операторите*** (29), (31) се характеризират с това, че:

■ ***ML-Clegg-операторите*** са линейни оператори и за тях е в сила зависимостта (33);

$${}_a \mathcal{D}_{t,ML}^{1 \text{ Clegg}} \{ a f(z) + b h(z) \} = a {}_a \mathcal{D}_{t,ML}^{1 \text{ Clegg}} f(z) + b {}_a \mathcal{D}_{t,ML}^{1 \text{ Clegg}} h(z) \quad (33)$$

■ за ***ML-Clegg-операторите*** е в сила адитивния закон (34) за интегрални трансформации;

$$\mathcal{D}_{t,ML}^{\alpha \text{ Clegg}} \mathcal{D}_{t,ML}^{\beta \text{ Clegg}} f(z) = \mathcal{D}_{t,ML}^{(\alpha+\beta) \text{ Clegg}} f(z) \quad (34)$$

■ ***Laplace-трансформацията на ML-Clegg-оператора за интегриране*** се определя с (35),

$$\mathcal{L} \{ I_{t,ML}^{\alpha \text{ Clegg}} f(t) \} = p^{-\alpha} F(p) \quad (35)$$

аналогично на ***Laplace-трансформацията на традиционния оператор за интегриране*** (36);

$$\mathcal{L} \{ I^{\alpha} f(t) \} = p^{-\alpha} F(p) \quad (36)$$

■ ***Laplace-трансформацията на ML-Clegg-оператора за диференциране*** се определя с (37),

$$\mathcal{L} \{ \mathcal{D}_{t,ML}^{\alpha \text{ Clegg}} f(t) \} = p^{\alpha} F(p) \quad (37)$$

аналогично на **Laplace**-трансформацията на традиционния оператор (38);

$$\mathcal{L} \{ D^\alpha f(t) \} = p^\alpha F(p) \quad (38)$$

■ **Fourier**-трансформацията на **ML-Clegg-оператора за интегриране** се определя като (39);

$$\mathcal{F} \{ I_{t, \mathcal{ML}}^{\alpha, \text{Clegg}} f(t) \} = (j\omega)^{-\alpha} F(\omega) \quad (39)$$

■ **Fourier**-трансформацията на **ML-Clegg-оператора за диференциране** се определя като (40).

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{D}_{t, \mathcal{ML}}^{\alpha, \text{Clegg}} f(t) \} = \mathcal{F} \{ \mathcal{D}_{t, \mathcal{ML}}^{\alpha, \text{Clegg}} f(t) \} = (j\omega)^\alpha F(\omega) \quad (40)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новото и оригинално в настоящата разработка се състои в:

■ анализа на свойствата на нелинейния **Clegg-интегратор** [9] и изследването на ефекта от приложението му в **Reset-системи** за управление на обекти със закъснение с **PI-Clegg**-, **ML-PI-Clegg**-, **ML-ID-Clegg**- и **ML-PID-Clegg-регулатори**, съпътствано с анализ и доказателство превъзходството на качеството на **Reset-системите** пред това на съответстващите им традиционните системи, отразено с количествени показатели (време на регулиране, степен на минимизиране на пререгулирането, запаси на устойчивостта по модул и по фаза);

■ разработения линеен **Reset**-ключ със свойства на лентов филтър с „вертикална“ фазочестотна характеристика на аналогов ключ, който апроксимира нелинейния **Reset**-ключ, в който са приложени разработените в [11,12] **ML-модули** с памет за репетитивни системи за целите на създаването на линейния **Reset**-ключ;

■ предложените линейни **ML-Clegg-интегратор**, **ML-Clegg-диференциатор**, **ML-PI-Clegg**-, **ML-ID-Clegg**- и **ML-PID-Clegg-регулатори**, реализиращи нов клас **ML-Clegg-оператори за интегриране** (29) и за диференциране (31);

■ **метод на функционална хармонична апроксимация** при критерий **равенство на площите** за структурната конфигурация на **ML-Clegg-интегратори** и на **ML-Clegg-диференциатори** (9), (10);

■ дефиницията и систематизация на свойствата на нов клас **ML-Clegg-оператори за интегриране** (29) и за диференциране (31), които се отличават от съответните традиционни оператори (28), (30) по наличието в тях на функцията $f_{\mathcal{ML}}(e)$ (32).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] **A. Baños, A. Barreiro** (2012), *Reset Control Systems*, in: Advances in Industrial Control, © 2012 Springer, ISBN-10: 144712216X, ISBN-13: 978-1447122166, 348 p.
- [2] **A. Baños, A. Vidal** (2012), *Design of reset control systems: the PI-CI compensator*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, © 2012 American Society of Mechanical Engineers, ISSN:0022-0434, Vol 134 (5) (2012), pp. 310-380
- [3] **A. Baños, J. Carrasco, A. Barreiro** (2011), *Reset Times-Dependent Stability of Reset Control Systems*, IEEE Trans. Autom. Control 56 (1) (2011) pp. 217-223
- [4] **A. Barreiro, A. Baños** (2012), *Sistemas de Control basados en Reset*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, © 2012 Elsevier, ISSN: 1697-7912, Vol 9 (2012) 329-346
- [5] **C. V. Holloţ** (1997), *Revisiting Clegg Integrators: Periodicity, Stability and IQCs*, System Structure and Control, © 1997 IFAC Bucharest, Romania, 1997, pp. 31-38
- [6] **D. Nesic, L. Zaccarian, A.R. Teel** (2008), *Stability Properties of Reset Systems*, Automatica, © 2008 Elsevier, ISSN: 0005-1098, 4 (8) (2008) pp. 2019-2026
- [7] **Guo Y., W. Gui, Ch. Yang, L. Xie** (2010), *Stability Analysis and Design of Reset Control Systems with Discrete-Time Triggering Conditions*, Automatica, © 2010 Elsevier, ISSN: 0005-1098, Vol 48 (2010), pp. 528-535
- [8] **Guo Y., Wang Y., Xie L., Zheng J.** (2009), *Stability Analysis and Design of Reset Systems: Theory and an Application*, Automatica, © 2009 Elsevier, Vol 45 (2), pp. 492-497
- [9] **J. C. Clegg** (1958), *A nonlinear Integrator for Servomechanisms*, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers 11 (1958), Part II: Applications and Industry, © 1958 IEEE, Volume: 77, Issue: 1, March 1958, pp. 41-42
- [10] **M. A. Davó, A. Baños** (2016), *Reset Control of Integrating Plus Dead Time Processes*, Journal of Process Control, © 2016 Elsevier, ISSN: 0959-1524, Vol. 38 (2016) pp. 22-30
- [11] **Nikolova N., Nikolov E.** (2008), *ML-Structures in the Repetitive Robust Control Systems*, Journal Cybernetics and Information Technologies Journal, © 2008 Bulgarian Academy of Science, ISSN 1311-9702, Vol. 8 (2008), No 1, pp. 44-64
- [12] **Nikolova N., Nikolov E.** (2013), *Absorptive Repetitive Filters with Operators of Generalized Fractional Calculus*, Journal Cybernetics and Information Technologies, © 2013 Bulgarian Academy of Science, ISSN 1311-9702, Vol. 12 (2013), No X, pp. 21-32

Автор: Емил Николов, проф. дтн, катедра „Автоматизация на Непрекъснатите Производства“, Факултет Автоматика, Технически Университет - София; E-mail address: nicoloff@tu-sofia.bg

Постъпила на 29.10.2018 г.

Рецензент: чл. кор. проф. дтн. Петко Петков

МОДЕЛИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА РОТАЦИОНЕН ПНЕВМАТИЧЕН ИЗПЪЛНИТЕЛЕН МЕХАНИЗЪМ

Борис Грасиани, Александър Маринчев

Резюме: В работата се изследва ротационен пневматичен изпълнителен механизъм. Синтезиран и моделиран е моделът на ротационния изпълнителен механизъм по експериментални резултати. В работата са изследвани времевите и честотните характеристики на синтезираният модел.

Ключови думи: ротационен пневматичен изпълнителен механизъм, пропорционален разпределителен клапан

MODELING AND STUDY OF ROTARY PNEUMATIC ACTUATOR

Boris Grasiani, Alexander Marinchev

Abstract: The paper explores the rotary actuator. The model of rotary pneumatic actuator has been synthesized and modeling on experimental results. In the work have been studied time response and frequency characteristics of synthesized model.

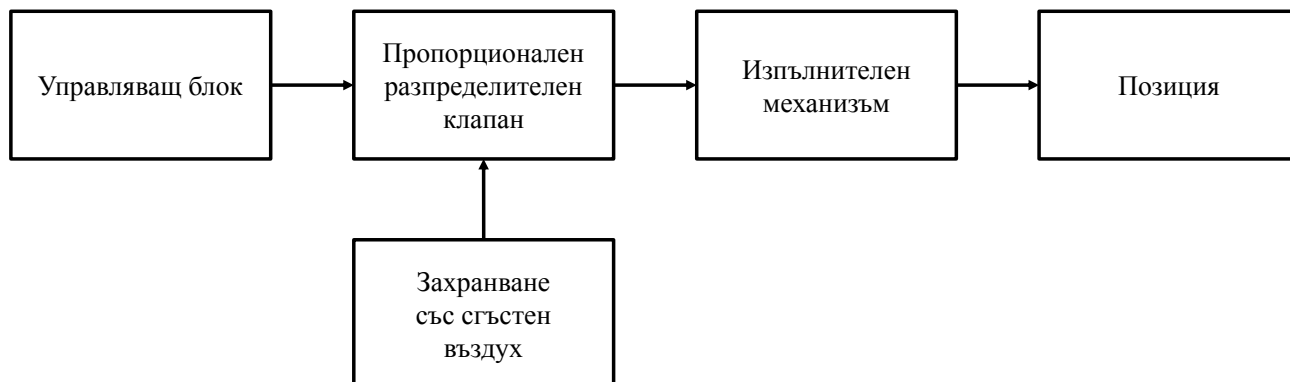
Keywords: rotary actuator, proportional distribution valve

ВЪВЕДЕНИЕ

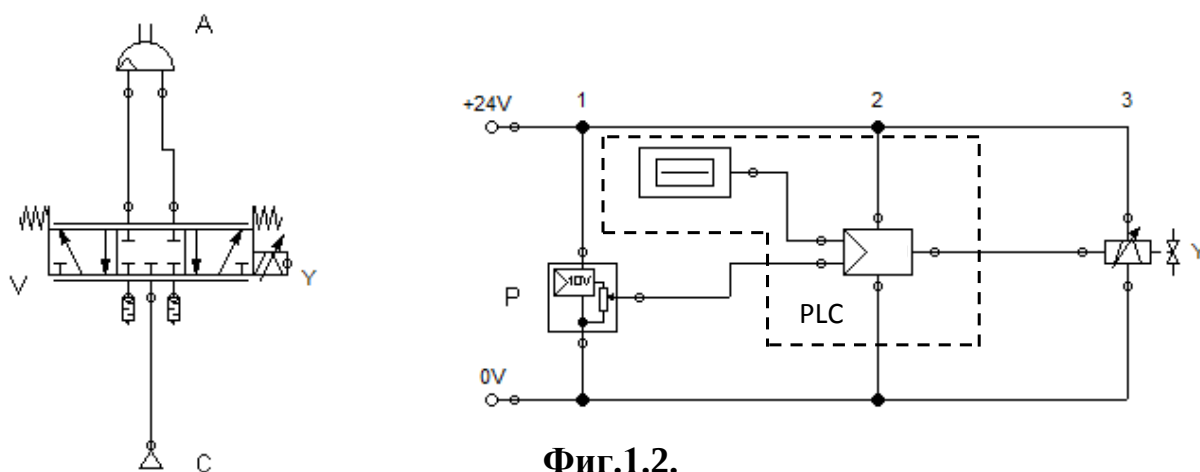
Разглежда се лабораторна технологична инсталация показана на фиг.1., където на фиг.1.1. е показана принципната блок схема, а на фиг.1.2. е показана пневматичната и електрическата схема (управляващият блок). Използваните означения във фиг.1.2. са както следва: **C**-компресор, **V**-пропорционален разпределителен клапан, **A**-ротационен изпълнителен механизъм, **P**-потенциометър, **PLC**-контролер, **У**-електрическото управление на **V**. Принципната схема на **A** е показана на фиг.1.3., където P_1 и P_2 са наляганията, които се подават от пропорционалният разпределителен клапан **V** към ротационният изпълнителен механизъм **A**, $Bd\mu/dt$ - сила на триене, $Md^2\mu/dt^2$ - инерционна сила, противодействащи на разликата от наляганията P_1 и P_2 приложени върху ефективната площ F на буталото - ΔPF . **Целта**, която си поставя настоящата разработка е: да се синтезира математически модел на ротационен пневматичен изпълнителен механизъм и изследват неговите характеристики. **Задачите** които се решават, за реализиране на така поставената цел са следните:

- аналитично описание на модела на изпълнителния механизъм
- опитно снемане на характеристиките на основните величини на пневматичната инсталация;
- апроксимация на сметите характеристики, базирани на емпирични методи;

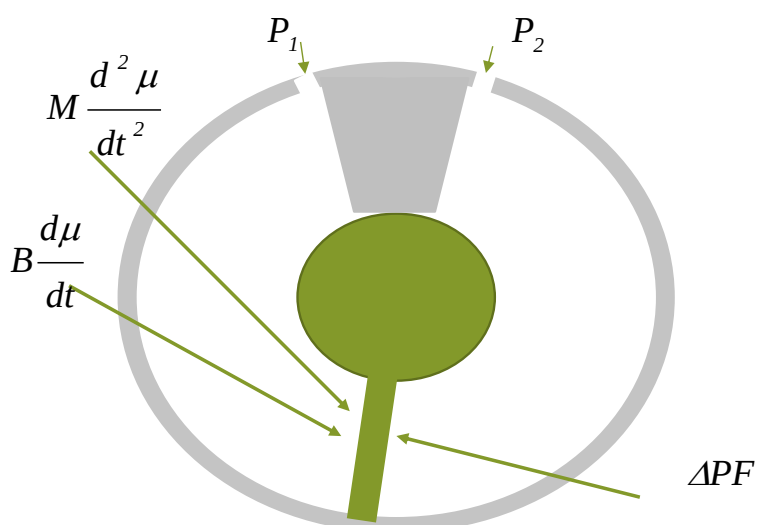
- изследване на свойствата на синтезирания модел във времевата и честотната област;



Фиг.1.1.



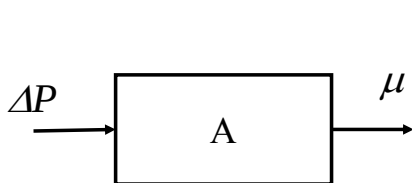
Фиг.1.2.



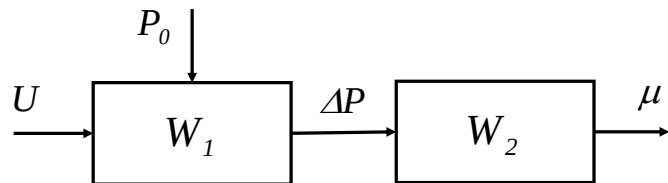
Фиг.1.3.

АНАЛИТИЧНО ОПИСАНИЕ НА ИЗПЪЛНИТЕЛНИЯ МЕХАНИЗЪМ

От фиг.1.3. се вижда, че входният сигнал на изпълнителния механизъм се явява разликата от наляганията подавани от разпределителният клапан, а изходната величина е позицията., което е онагледено на фиг.2.1. Схемата обобщаваща опитната постановка показана на фиг.1.2. е показана на фиг.2.2., където са използвани следните означения: U - управляващ сигнал (напрежение), W_1 - предавателната функция на управляващият блок, W_2 - предавателната функция на изпълнителния механизъм, P_0 - налягането подавано от компресора.



Фиг.2.1.



Фиг.2.2.

Имайки предвид фиг.1.3., където са показани силите, които действат върху буталото на изпълнителния механизъм [11-15], то в сила е стационарното линейно диференциално уравнение (1) на астатична система от втори ред. След полагане на $d/dt = p$ се получава предавателна функция (2), която съответства на линейна стационарна астатична система от втори ред. От (2) се получава предавателна функция (3) на реално интегриращо звено. Докато за W_1 се получава преходната функция (4), което е апериодично звено - фиг.3. А от фиг.2.2. се определя преходната функция (5) на ротационния пневматичен изпълнителен механизъм, която е астатична от трети ред. Последното след съответните математически преобразувания се стига до линейното диференциално уравнение (6) на астатична динамична система. След полагане на $p = \delta + j\omega$ и съответните математически преобразувания в (5), се получава честотната функция (7), съответно реалната (8) и имагинерната (9) част, а също така и модула(10) и аргумента (11) на динамичната система.

За астатичната динамична система са показани времеви и честотни характеристики, както следва на:

- фиг.3. – преходната функция;
- фиг.4. – импулсната преходна функция;
- фиг.5., фиг.6. и фиг.7. - честотните характеристики;
- фиг.8. - ходограф на корените.

$$M \frac{d^2 \mu}{dt^2} + B \frac{d\mu}{dt} = k \Delta P F \quad (1)$$

$$\mu(Mp^2 + Bp) = k \Delta P F \quad (2)$$

$$W_2 = \frac{\mu(p)}{\Delta P(p)} = \frac{k_2 F}{T_i p^2 (1 + T_i p)} \quad (3)$$

$$W_1 = \frac{\Delta P(p)}{U(p)} = \frac{k_1}{1+T_1 p} \quad (4)$$

$$W_{PIIIIM}(p) = \frac{\mu(p)}{U(p)} = W_1(p)W_2(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)T_i p(T_2 p + 1)} \quad (5.a)$$

$$W_{PIIIIM}(p) = \frac{k_1 k_2}{T_1 T_i T_2 p^3 + (T_1 T_i + T_2 T_i) p^2 + T_i p} \equiv \frac{k}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p} \quad (5.b.)$$

$$a_3 = T_1 T_2 T_i ; a_2 = (T_1 T_i + T_2 T_i) ; a_1 = T_i$$

$$a_3 \frac{d^3 \mu}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \mu}{dt^2} + a_1 \frac{d\mu}{dt} = kU \quad (6)$$

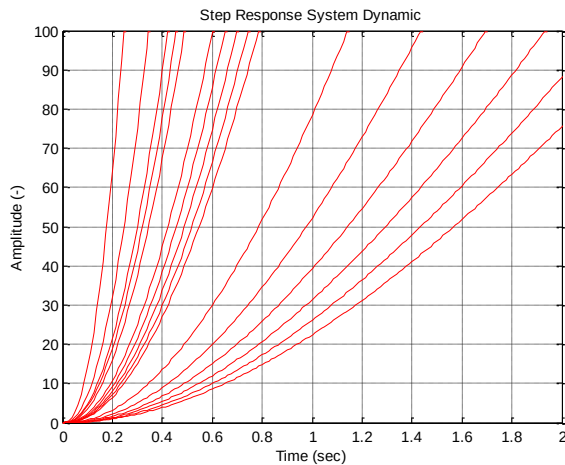
$$W_{PIIIIM}(j\omega) = -\frac{k(1-jT_1\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)} \cdot j \frac{(1+jT_2\omega)}{T_i\omega(1+T_2^2\omega^2)} \quad (7)$$

$$Re(\omega) = -\frac{k(1-jT_1\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)} \quad (8)$$

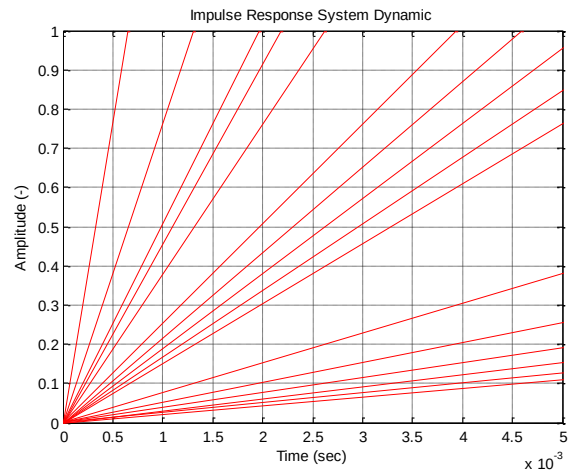
$$Im(\omega) = \frac{k(1+jT_2\omega)}{T_i\omega(1+T_2^2\omega^2)} \quad (9)$$

$$Mod(j\omega) = \sqrt{\left(\frac{k(1-jT_1\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{(1+jT_2\omega)}{T_i\omega(1+T_2^2\omega^2)}\right)^2} \quad (10)$$

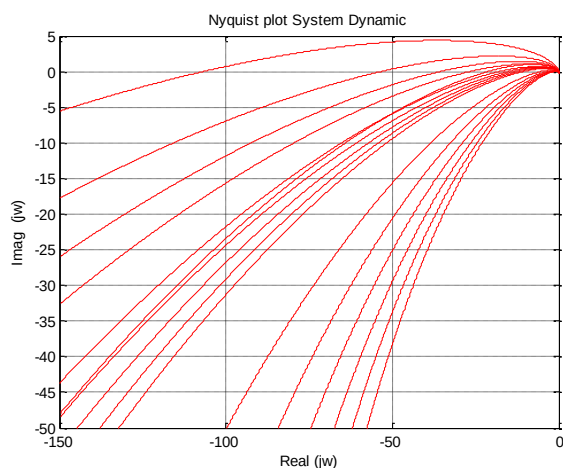
$$Arg(\omega) = \arctg \left(-\left(\frac{(1+jT_2\omega)}{T_i\omega(1+T_2^2\omega^2)}\right) \middle/ \left(-\frac{k(1-jT_1\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)}\right) \right) \quad (11)$$



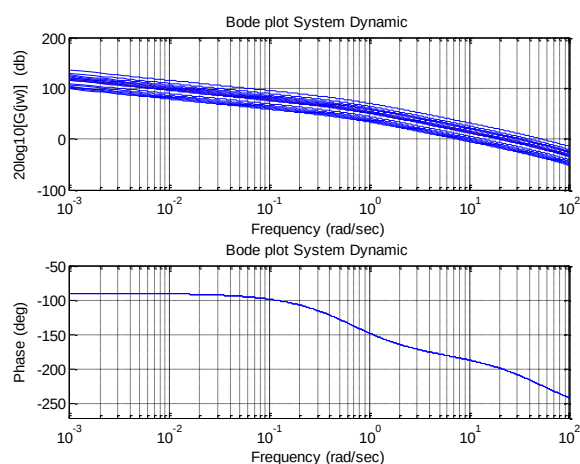
Фиг.3.



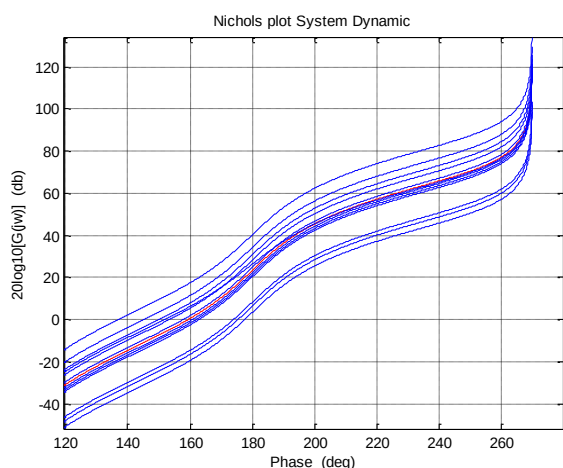
Фиг.4.



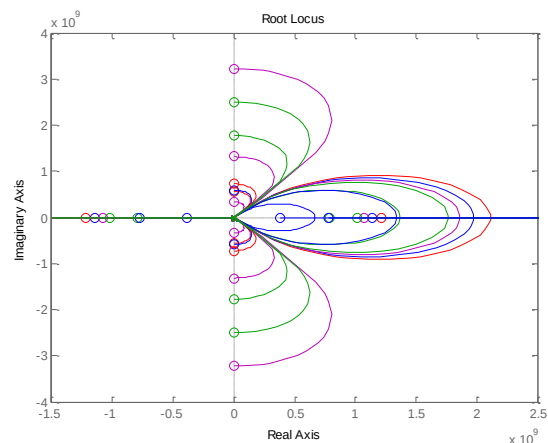
Фиг.5.



Фиг.6.



Фиг.7.



Фиг.8.

ОПИТНО СНЕМАНЕ НА ХАРАКТЕРИСТИКИТЕ НА ОСНОВНИТЕ ВЕЛИЧИНИ НА ПНЕВМАТИЧНАТА ИНСТАЛАЦИЯ

За снемане на времевите характеристики на основните величини в лабораторна пневматична FESTO-инсталация се използва TIA Portal V13 на Siemens [1].

Измерването на позицията и наляганията се извършва посредством аналогово-цифров преобразувател (**АЦП**), който е включен като разширителен модул към програмируемият контролер. Разширителният модул разполага с 4 канала на **АЦП**, което е с разделителна способност от 14 бита, представянето на измерената стойност в програмната среда е софтуерно разширено до диапазон от -27648 до +27648, това е направено с цел унификация при използването на различни видове разширителни модули. Измерените от **АЦП** стойности се отразяват на определени адреси от входното адресно пространство на програмируемия контролер. Има възможност за настройване на диапазона от измерваните напрежения или ток, като максималният диапазон е между -10V и +10V, поради тази причина към измервателния потенциометър за позицията на ротационния изпълнителен механизъм захранващото напрежение, което е 24V, е подадено през

резистор с подходяща стойност, така че максималния пад на напрежение върху потенциометъра да не превишава 10V. За да се получи точно измерване на позицията в програмната среда са измерени няколко точки от хода на движение на изпълнителния механизъм и е изчислена функцията на преобразуване от резултат на **АЦП** в проценти от пълният му ход. Установено е, че функцията на преобразуване е линейна и има вида (12), където μ е позицията, а QW_1 стойност на **АЦП** по съответния измервателен канал.

$$\mu = 0.0053 * QW_1 - 9.4284 \quad (12)$$

Освен позицията се измерват и двете налягания подавани от пропорционалния разпределителен клапан. Наляганията се измерват посредством два идентични пневмо-електрически преобразувателя, които осигуряват измерване на налягане между 0 и 10 bar и имат стандартен изходен сигнал по напрежение от 0V до 10V. Преобразувателите имат линейна характеристика и определянето на наляганията в контролера се осъществява посредством линейна функция на преобразуване, от която се получават изразите (13) и (14), където P_1 е налягането подавано от пропорционалния разпределителен клапан за задвижване на изпълнителния механизъм в едната посока и съответно за другата посока P_2 , а QW_2 и QW_3 са стойностите на **АЦП** по съответните измервателни канали.

$$P_1 = 3.6175 * 10^{-4} QW_2 - 0.0904 \quad (13)$$

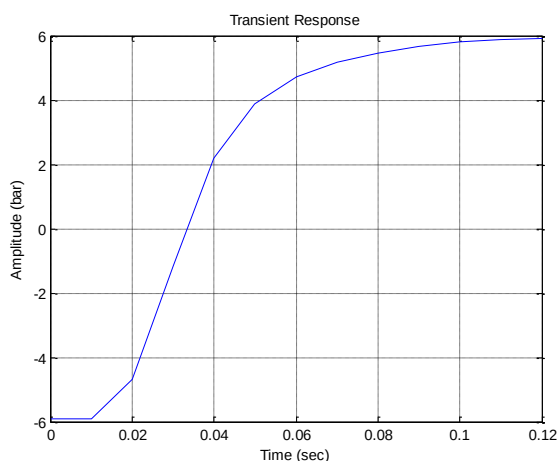
$$P_2 = 3.6175 * 10^{-4} QW_3 - 0.0904 \quad (14)$$

Като изходен сигнал на пропорционалния разпределителен клапан [16] и съответно входен на ротационния изпълнителен механизъм е приета разликата между двете налягания, които след съответните преобразувания се представят като числа с плаваща запетая и стандартна точност.

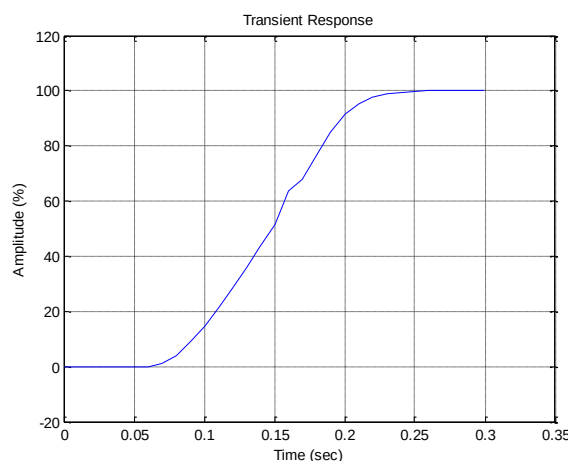
Получените експериментални резултати за пропорционалния разпределителен клапан са показани на фиг.9, а за ротационния изпълнителен механизъм са показани на фиг.10. Където амплитудата на фиг.9 се явява налягането, което се подава от компресора **C** и е разликата между наляганията подавани от пропорционалния разпределителен клапан **V** за задвижване на изпълнителния механизъм **A** в двете посоки, а на фиг.10 амплитудата показва позицията на **A**, която е представена в проценти от хода на ротационния изпълнителен механизъм.

При изследването на ротационния изпълнителен механизъм беше установено, че в характеристиката му съществуват някои нелинейности, които се изразяват в нечувствителност и насищане. Нечувствителността и насищането са нелинейности типични за голям брой индустриални обекти и системи. Нечувствителността се изразява в това, че когато се подава входен сигнал с малка амплитуда към изпълнителния механизъм, то той не извършва никакво преместване и чак когато амплитудата на входния сигнал достигне определена стойност тогава той започва да се движи. Поради това в преходната му характеристика се наблюдава закъснение, подобно на обект

който има закъснение. Другата нелинейност на изпълнителния механизъм е насищането, то се изразява в това, че след достигането на крайното си положение движението спира независимо от големината на входното въздействие. Това се вижда в преходната характеристика на изпълнителния механизъм подобно на установена стойност в края на характеристиката. В настоящата работа е моделирана динамиката на изпълнителния механизъм в зоната му на линейност и нелинейните ефекти не са отчетени в модела. Моделите са линейни и са валидни, когато изпълнителният механизъм вече се е задвижил и преди да е достигнал крайното си положение. Нелинейностите предстои да се изследват подробно и да се намерят техните математически модели в следващи разработки.



Фиг.9.



Фиг.10.

АПРОКСИМАЦИЯ НА СЧЕТИТЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, БАЗИРАНА НА ЕМПИРИЧНИ МЕТОДИ

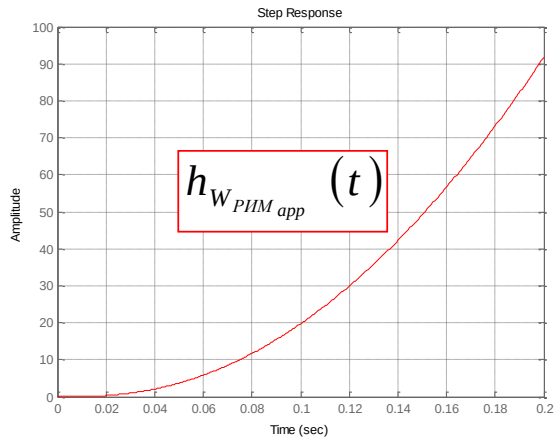
В литературата [2÷5] са познати различни емпирични и графо-аналитични, също така са познати и математически и изчислителни методи [6÷10] за определянето на стойностите на коефициентите и времеконстантите в (5). В настоящата разработка са избрани емпирични методи за апроксимация по данни от експериментално снета преходна характеристика на обекта. След нейната апроксимацията се достига до предавателна функции (15) със съответните стойности.

Получените апроксимации са моделирани и симулирани в средата на MATLAB, а получените характеристики са визуализирани, както следва:

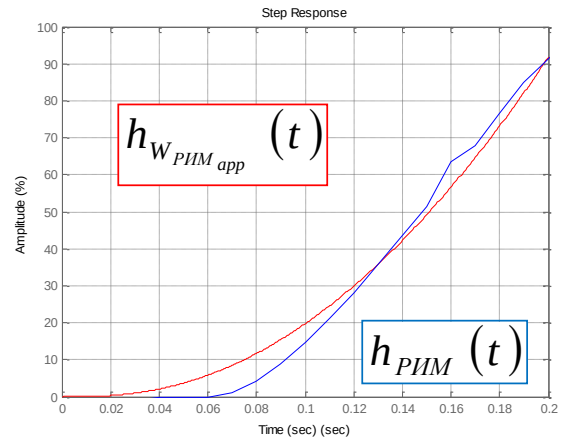
- фиг.11.1. и фиг.11.2. - $h_{W_{PHM}}(t)$ и $h_{W_{PHMapp}}(t)$ са преходните характеристики съответно на реално снетата характеристика и на нейната апроксимация;
- фиг.11.3. и фиг.11.4. – са честотни характеристики съответно в пространството на Nyquist и на Black-Nichols;
- фиг.11.5. – фазо-честотна характеристика;
- фиг.11.6. – амплитудно-честотна характеристика;

$$W_{PIIM}(p) = \frac{\mu(p)}{U(p)} = W_1(p)W_2(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)T_i p(T_2 p + 1)} \quad (15)$$

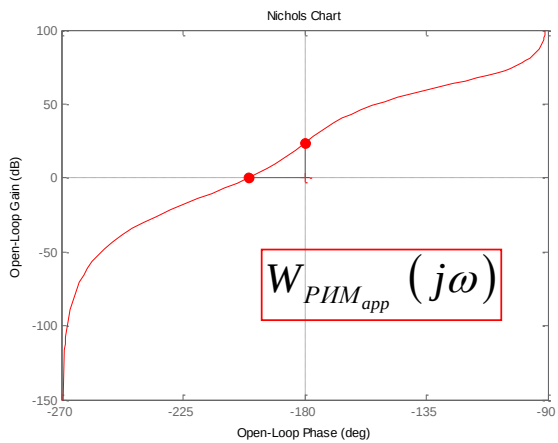
$$k_1 = 6; k_2 = 1; T_1 = 0.018; T_2 = 1.5; T_i = 0.0007;$$



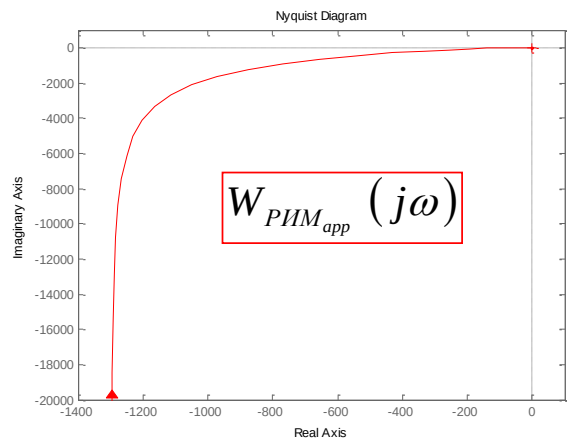
Фиг.11.1.



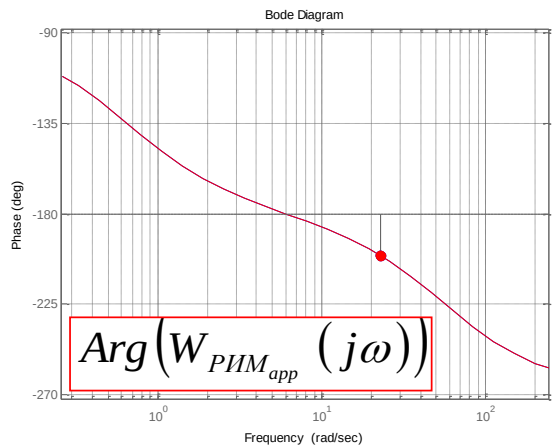
Фиг.11.2.



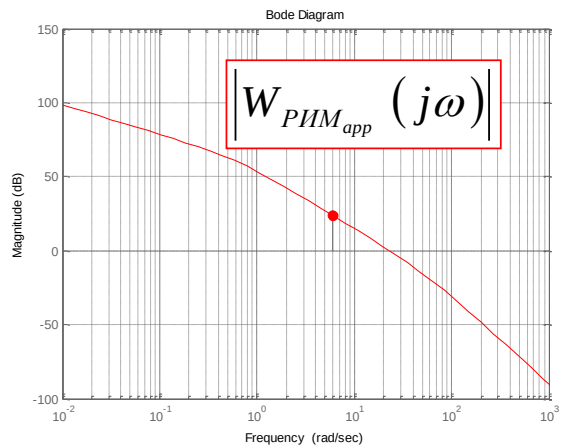
Фиг.11.3.



Фиг.11.4.



Фиг.11.5.



Фиг.11.6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Претенциите на разработката се изразяват в постигнатите оригинални и нови резултати, както следва:

- описан е аналитично математически модел на ротационният пневматичен изпълнителен механизъм;
- направено е симулационно изследване на аналитичния модел;
- снети са експериментално резултати на ротационен пневматичен изпълнителен механизъм;
- намерени са конкретните стойности за коефициентите и времеконстантите на модела, използвайки емпирични методи за апроксимация;
- моделиран и симулационно изследван е математическия модел в средата на MATLAB.
- направен е сравнителен анализ между реално заснетите резултати и апроксимирания модел.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Siemens, *SIMATIC, S7-1200 Programmable controller, System Manual*, (04/2012), Order number: 6ES7298-8FA30-8BH0, A5E02486680-06, pp 864, <https://cache.industry.siemens.com>
- [2] Иван Божов (1992), *Основи на автоматичното управление*, © София 1992, Държавно издателство Техника, ISBN 954-03-0067-3, 350 стр.
- [3] Nikolov E., St. Enev (2009), *Asservissement et regulation continue*, © 2009 Publishing House of Technical University of Sofia, ISBN 978-954-438-814-0, 160 p.
- [4] Нина Г. Николова, Емил Николов (2006), *Методи и алгоритми за настройка на регулатори в системи за управление справочно пособие по дисциплината „Приложни методи за управление на технологични процеси“*, © София 2006 изд. на Технически Университет София, ISBN -13 : 978-954-438-579-8, 72 стр.
- [5] Хинов Х., К. Наплатаров (1987), *Автоматизация на технологични процеси*, © София 1987, Държавно издателство Техника, УДК 62-50 (075.8), 395 стр.
- [6] Петков Т. (1972), *Идентификация на обектите за автоматизация*, София 1972, Държавно издателство Техника, 348 стр.
- [7] Растригин Л., Н. Маджаров, С. Марков. (1978), *Оценяване на параметри и състояния на динамически обекти*, София 1978, Държавно издателство Техника, 282 стр.
- [8] Ljung L.. (1999), *System Identification: Theory for the User*, NJ 1999, Prentice Hall.
- [9] Вучков И., Стоянов С. (1986), *Математическо моделиране и оптимизация на технологични обекти*, София 1986, Държавно издателство Техника, 341 стр.
- [10] Ефремов А. (2014), *Идентификация на многомерни системи: Линейен подход за оценяване*, В. Търново 2014, ДАР-РХ, 342 стр.

- [11] **Николов Е.** (2003), *Технически средства за автоматизация, втора част (управляващи алгоритми, интелигентни изпълнителни устройства и анти-шумови регулиращи органи)*, © София 2003, изд. на Технически университет София, ISBN 954-438-336-6, 296 стр.
- [12] **Богачева А. В.**, *Пневматические элементы систем автоматического управления*, Изд. Машиностроение, Москва 1966
- [13] **Герц Е. В.**, *Пневматические приводы*, изд. Машиностроение, Москва 1969, 359 стр.
- [14] **Meixner, H, Kolber R.** (1977), *Maintenance of Pneumatic Equipment and Systems. Textbook*, Esslingen, Publisher: Festo Didactic, ISBN: 3812708418, 233pp.
- [15] **Andrew Parr** (2011), *Actuators, Chapter 5 in Hydraulics and Pneumatics*, © 2011 Elsevier B.V., doi:10.1016/B978-0-08-096674-8.00005-7, pp.117-147
- [16] **Andrew Parr** (2011), *Control Valves, Chapter 4 in Hydraulics and Pneumatics*, © 2011 Elsevier B.V., doi:10.1016/B978-0-08-096674-8.00004-5, pp. 117-147

Автори: **Борис Грасиани**, гл. ас. д-р инж., катедра „Автоматизация на Непрекъснатите Производства“, Факултет Автоматика, Технически Университет - София, E-mail adress: bgrasiani@tu-sofia.bg, **Александър Маринчев**, гл. ас. д-р инж., , катедра „Автоматизация на Непрекъснатите Производства“, Факултет Автоматика, Технически Университет - София, E-mail adress: amar@tu-sofia.bg

Постъпила на 30.10.2018 г.

Рецензент: проф. дтн. Емил Николов

ЙОРДАНОВИ ДИФЕРЕНЦИРАНИЯ В ПРЪСТЕНИ И ПОЛУПРЪСТЕНИ II

Стоян Димитров

Резюме: В настоящият кратък обзор разглеждаме Йордановото диференциране в пръстени и полупръстени.

Ключови думи: Диференциална алгебра, Йорданово диференциране, пръстени, полупръстени.

JORDAN DERIVATIONS ON RINGS AND SEMIRINGS II

Stoyan Dimitrov

Abstract: In this brief survey we consider the Jordan derivations on rings and semirings.

Keywords: Differential algebra, Jordan derivations, rings, semirings.

1 Introduction

The Jordan algebras are actual and play significant role in mathematics (for instance [43], [62]).

As well known the derivations on rings are very important both in theory and applications, and were studied intensively ([13], [17], [18], [19], [36], [39], [56], [58], [59], [60], [63]). The question under what conditions a map becomes a derivation attracted much attention of mathematicians (for example [18], [32], [34], [36], [81]).

One of the most remarkable map is a Jordan derivation (for instance [4], [9], [11], [14], [16], [27], [29], [38], [44], [46], [47], [48], [49], [51], [52], [53], [78], [80]).

Recently the author [22] has made an overview of the basic results about Jordan derivations on rings and semirings. Of course the field of Jordan derivations is too extensive and there are a lot of papers that are not included in the work of the author. In the present a paper the author extends his brief about Jordan derivations on rings and semirings.

2 Preliminaries

Recall that a ring R is said to be prime if for $a, b \in R$, $aRb = \{0\}$ implies that either $a = 0$ or $b = 0$, and is called semiprime in case $aRa = \{0\}$ implies $a = 0$.

An additive mapping $\mathbf{d} : R \rightarrow R$ ($\mathbf{d} : S \rightarrow S$), where R (S) is an arbitrary ring (semiring), is said to be a derivation if $\mathbf{d}(xy) = \mathbf{d}(x)y + x\mathbf{d}(y)$, for all $x, y \in R$ ($x, y \in S$).

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. A map $\mathbf{J} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is called a Jordan derivation of $\mathcal{A}$, if $\mathbf{J}(x^2) = \mathbf{J}(x)x + x\mathbf{J}(x)$, for all $x \in \mathcal{A}$. Clearly, every derivation is a Jordan derivation. The converse is in general not true.

3 Generalized Jordan derivations

The notion of generalized Jordan derivations was introduced by Nakajima [55] and by W. Jing and S. Lu [37].

Definition 1 *An additive mapping $F : R \rightarrow R$ is called a generalized Jordan derivation if there exists a Jordan derivation $d : R \rightarrow R$ such that*

$$F(x^2) = F(x)x + xd(x)$$

holds for all $x \in R$.

Theorem 1 *Let R be a 2-torsion free prime ring, then every generalized Jordan derivation on R is a generalized derivation.*

Proof. See [37]. □

Results concerning generalized Jordan derivations can be found in [5], [6], [8], [12], [25], [33], [73], [76], [77].

4 Jordan left derivations

In 1990 Brešar and Vukman [15] introduced the notion of Jordan left derivations.

Definition 2 *Let $\mathcal{A}$ be an algebra, $\mathcal{M}$ be a left $\mathcal{A}$ -module, and $\mathbf{J} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ be a linear mapping. $\mathbf{J}$ is said to be a Jordan left derivation if $\mathbf{J}(a^2) = 2a\mathbf{J}(a)$ for any $a \in \mathcal{A}$.*

Theorem 2 *Let R be a prime ring, and let $J : R \rightarrow R$ be a nonzero left Jordan derivation. If $\text{char}(R) \neq 2, 3$ then J is a derivation and R is commutative.*

Proof. See [15]. □

Later on Deng [20] proved that the assumption $\text{char}(R) \neq 3$ is superfluous.

Results concerning Jordan left derivations can be found in [7], [23], [24], [31], [35], [40], [41], [42], [50], [61], [71], [72], [74], [79]

5 Generalized Jordan left derivations

In 2008 M. Ashraf and S. Ali [10] introduced the notion of generalized Jordan left derivations.

Definition 3 *An additive mapping $G : R \rightarrow R$ is called a generalized Jordan left derivation if there exists a Jordan left derivation $\delta : R \rightarrow R$ such that*

$$G(x^2) = xG(x) + x\delta(x)$$

holds for all $x \in R$.

Theorem 3 *Let R be a 2-torsion free prime ring. Then every generalized Jordan left derivation is a generalized left derivation on R .*

Proof. See [10]. □

Results concerning generalized Jordan left derivations can be found in [1], [28], [31], [57], [64].

6 (M,N)-Jordan derivations

In 2008 J. Vukman [75] introduced the notion of (m, n) -Jordan derivations.

Definition 4 *Let $m \geq 0$, $n \geq 0$ with $m + n \neq 0$ be some fixed integers. An additive mapping $D : R \rightarrow R$, where R is an arbitrary ring, is called a (m, n) -Jordan derivation in case*

$$(m + n)D(x^2) = 2mD(x)x + 2nxD(x)$$

holds for all $x \in R$.

Theorem 4 *Let $m \geq 1$, $n \geq 1$ with $m \neq n$ be some fixed integers and let R be a prime ring with $\text{char}(R) \neq 2mn(m + n)|m - n|$. Suppose $D : R \rightarrow R$ is a nonzero (m, n) -Jordan derivation. If $\text{char}(R) = 0$ or $\text{char}(R) > 3$, then D is a derivation and R is commutative.*

Proof. See ([75], Theorem 2). □

Results concerning $(m; n)$ -Jordan derivations can be found in [3], [26], [45], [54].

7 Generalized (m, n) -Jordan derivations

In 2014 S. Ali and M. Fošner [2] introduced the notion of generalized (m, n) -Jordan derivations.

Definition 5 *Let $m \geq 0$, $n \geq 0$ with $m + n \neq 0$ be some fixed integers and let R be an arbitrary ring. An additive mapping $F : R \rightarrow R$ is called a generalized (m, n) -Jordan derivation if there exists an (m, n) -Jordan derivation $d : R \rightarrow R$ such that*

$$(m + n)F(x^2) = 2mF(x)x + 2nxd(x)$$

holds for all $x \in R$.

Theorem 5 *Let $m \geq 1$, $n \geq 1$ with $m \neq n$ be some fixed integers, let R be a prime ring with $\text{char}(R) \neq 6mn(m + n)|m - n|$ and let $F : R \rightarrow R$ be a nonzero generalized (m, n) -Jordan derivation. If $\text{char}(R) = 0$ or $\text{char}(R) > 3$, then F is a derivation and R is commutative.*

Proof. See ([2], Theorem 2). □

Results concerning generalized $(m; n)$ -Jordan derivations can be found in [30].

8 Jordan derivations in semirings

If in semiring S we define a Jordan multiplication $x \circ a = ax + xa$ and denote $\delta_x(a) = x \circ a$, the map δ_x is not a Jordan derivation and also is not a derivation even in the case when semiring S is an additively idempotent. But when S is an endomorphism semiring of a finite chain the Jordan multiplication is a derivation – see D. Vladeva [66], [67] and [68]. In [69] are considered a new type semirings – endomorphism semirings of an infinite chain and proved that the projections on some right ideals are derivations in these semirings. D. Vladeva in [70] continues the investigations in endomorphism semirings of an infinite chain and finds some results for Jordan multiplication, which is derivation in these semirings.

For more information about derivations and Jordan derivations in semirings we refer to [21], [22].

References

- [1] S. Ali (2011), *On generalized left derivations in rings and Banach algebras*, Aequat. Math., **81**, (2011), 209 – 226 .
- [2] S. Ali, M. Fošner (2014), *On generalized (m, n) -derivations and generalized (m, n) -Jordan derivations in rings*, Algebra Colloquium, **21**, (2014), 411 – 420.
- [3] G. An, J. He (2018), *Characterizations of (m, n) -Jordan derivations on some algebras*, arXiv:1803.02046v1 [math.OA] 6 Mar 2018.
- [4] R. An, J. Hou (2010), *Characterizations of Jordan derivations on rings with idempotent*, Linear and Multilinear Algebra, **58**, (2010), 753 – 763.
- [5] B. Arslan, H. Inceboz (2014), *A characterization of generalized Jordan derivations on Banach algebras*, Periodica Mathematica Hungarica, **69**, (2014), 139 – 148.
- [6] M. Ashraf, N. Rehman (2000), *On Jordan generalized derivations in rings*, Math. J. Okayama Univ., **42**, (2000), 7 – 9.
- [7] M. Ashraf, N. Rehman, S. Ali (2001), *On Jordan left derivations of Lie ideals in prime rings*, Southeast Asian Bull. Math., **25**, (2001), 379 – 382.
- [8] M. Ashraf, N. Rehman, S. Ali (2003), *On Lie ideals and Jordan generalized derivations of prime rings*, Indian J. Pure Appl. Math., **34**, (2003), 291-294.
- [9] M. Ashraf, A. Ali, S. Ali (2004), *On Lie ideals and generalized (θ, φ) -derivations in prime rings*, Comm. Algebra, **32**, (2004), 2977 – 2985.
- [10] M. Ashraf, S. Ali (2008), *On generalized Jordan left derivations in rings*, Bull. Korean Math. Soc., **45**, (2008), 253 – 261.
- [11] M. Ashraf, A. Ali, M. Mozumder (2010), *On Lie ideals and generalized Jordan (θ, φ) -derivations in rings*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **65**, (2010), 461 – 465.
- [12] M. Atteya (2015), *A note on generalized Jordan derivations in semiprime rings*, Mathematics and Statistics, **3**, (2015), 7 – 9.
- [13] S. Ayupov, F. Arzikulov (2017), *2-local derivations on associative and Jordan matrix rings over commutative rings*, arXiv:1705.09910 v1 [math.RA] 28 May 2017.

- [14] D. Benkovič, N. Širovnik (2012), *Jordan derivations of unital algebras with idempotents*, Linear Algebra and its Applications, **437**, (2012), 2271 – 2284.
- [15] M. Brešar, J. Vukman (1990), *On left derivations and related mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **110**, (1990), 7 – 16.
- [16] M. Brešar, J. Vukman (1991), *Jordan (θ, φ) -derivations*, Glasnik Mat., **16**, (1991), 13 – 17.
- [17] E. Christensen (1997), *Derivations of nest algebras*, Mathematische Annalen, **229**, (1997), 155 – 161.
- [18] R. Crist (1996), *Local derivations on operator algebras*, Journal of Functional Analysis, **135**, (1996), 76 – 92.
- [19] H. Dales (2000), *Banach Algebras and Automatic Continuity*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (2000).
- [20] Q. Deng (1992), *On Jordan left derivations*, Math. J. Okayama Univ., **34**, (1992), 145 – 147.
- [21] S. Dimitrov (2017), *Derivations on semirings*, Appl. Math. in Eng. and Econ. – 43th. Int. Conf., AIP Conf. Proc., **1910**, 060011, (2017).
- [22] S. Dimitrov (2017), *Jordan derivations on rings and semirings*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, **67**, 3, (2017), 35 – 44.
- [23] A. Ebadian, M. Gordji (2011), *Left Jordan derivations on Banach algebras*, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, **6**, (2011), 1 – 6.
- [24] B. Fadaee, H. Ghahramani (2018), *Jordan left derivations at the idempotent elements on reflexive algebras*, Publ. Math. Debrecen, **92/3-4**, (2018), 261 – 275.
- [25] B. Ferreira, H. Guzzo Jr, R. Ferreira (2018), *Generalized Jordan derivations on semiprime rings*, arXiv:1805.00009v1 [math.RA] 30 Apr 2018
- [26] M. Fošner, J. Vukman (2012), *On some functional equation arising from (m, n) -Jordan derivations and commutativity of prime rings*, Rocky Mountain J. Math., **42**, (2012), 1153, – 1168.
- [27] H. Ghahramani (2014), *On derivations and Jordan derivations through zero products*, arXiv:1312.6952v2 [math.RA] 2 Jan 2014.

- [28] H. Ghahramani (2014), *Characterizing Jordan centralizers and Jordan generalized derivations on triangular rings through zero products*, arXiv:1312.6958v2 [math.RA] 2 Jan 2014.
- [29] H. Ghahramani (2015), *Characterizing Jordan derivations of matrix rings through zero products*, Math. Slovaca, **65**, (2015), 1277 – 1290.
- [30] A. Ghosh, O. Prakash (2018), *Generalized (m,n) -Jordan centralizers and derivations on semiprime rings*, arXiv:1806.04933v1 [math.RA] 13 Jun 2018.
- [31] N. Ghosseiri (2012), *On Jordan left derivations and generalized Jordan left derivations of matrix rings*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, **38**, (2012), 689 – 698.
- [32] J. Hou, X. Qi (2008), *Additive maps derivable at some points on $\mathcal{T}$ -subspace lattice algebras*, Linear Algebra and its Applications, **429**, (2008), 1851 – 1863.
- [33] J. Hou, X. Qi (2009), *Generalized Jordan derivation on nest algebras*, Linear Algebra and its Applications, **430**, (2009), 1479 – 1485.
- [34] J. Hou, X. Qi (2010), *Characterizations of derivations of Banach space nest algebras: all-derivable points*, Linear Algebra and its Applications, **432**, (2010), 3183 – 3200.
- [35] B. Hvala (1998), *Generalized derivations in rings*, Comm. Algebra, **26**, (1998), 1147 – 1166.
- [36] W. Jing, S. Lu, P. Li (2001), *Characterization of derivation on some operator algebras*, Bull. Austr. Math. Soc., **353**, (2001), 313 – 315.
- [37] W. Jing, S. Lu (2003), *Generalized Jordan derivations on prime rings and standard operator algebras*, Taiwanese J. Math., **7**, (2003), 605– 613.
- [38] Z. Jokar, A. Hosseini, A. Niknam (2017), *Some conditions under which Jordan derivations are zero*, Journal of Taibah University for Science, **11**, (2017), 1095 – 1098.
- [39] S. Jöndrup (1995), *Automorphisms and derivations of upper triangular matrices*, Linear Algebra and its Applications, **22**, (1995), 205 – 215.
- [40] K. Jun, B. Kim (1996), *A note on Jordan left derivations*, Bull. Korean Math. Soc., **33**, (1996), 221 – 228.

- [41] Y. Jung (1999), *Some results on Jordan left derivations in Banach algebras*, Comm. Korean Math. Soc., **14**, (1999), 513 - 519.
- [42] Y. Jung, K. Park (2010), *Left Jordan derivations on Banach algebras and related mappings*, Bull. Korean Math. Soc., **47**, (2010), 151 – 157.
- [43] I. Kaygorodov, A. Lopatin, Y. Popov (2015), *Jordan algebras admitting derivations with invertible values*, arXiv:1511.00742v1 [math.RA] 2 Nov 2015.
- [44] M. Khrypchenko (2016), *Jordan derivations of finitary incidence rings*, arXiv:1510.00944v2 [math.RA] 14 Jan 2016.
- [45] I. Kosi-Ulbl, J. Vukman (2016), *A note on (m,n) -Jordan derivations of rings and Banach algebras*, Bull. Austr. Math. Soc., **93**, (2016), 231– 237
- [46] Y. Li, F. Lu (2007), *Additive Jordan derivations of reflexive algebras*, J. Math. Anal. Appl., **329**, (2007), 102 – 111.
- [47] Y. Li, F. Wei (2013), *Jordan Derivations of some extension algebras*, arXiv:1303.0372v1 [math.RA] 2 Mar 2013.
- [48] Y. Li, C. Zheng (2017), *A note on Jordan derivations of trivial generalized matrix algebras*, Comm. Korean Math. Soc., **32**, (2017), 261 – 266.
- [49] Y. Li, F. Wei (2018), *Jordan derivations and Lie derivations of path algebras*, Bull. Iran. Math. Soc., (2018), **44**, 79 – 92.
- [50] J. Li, J. Zhou (2010), *Jordan left derivations and some left derivable maps*, Oper. Matrices, **4**, (2010), 127 – 138.
- [51] J. Li, J. Zhou (2011), *Characterizations of Jordan derivations and Jordan homomorphisms*, Linear and Multilinear Algebra, **59**, (2011), 193 – 204.
- [52] F. Lu (2009), *Characterizations of derivations and Jordan derivations on Banach algebras*, Linear Algebra and its Applications, **430**, (2009), 2233 – 2239.
- [53] F. Lu (2010), *Jordan derivations of reflexive algebras*, Integr. Equ. Oper. Theory, **67**, (2010), 51 – 56.
- [54] A. Majeed, C. Ozel (2014), *(m,n) -Jordan derivations*, Filomat, **28**, (2014), 1881 – 1883 .
- [55] A. Nakajima (2000), *On generalized higher derivations*, Turk. J. Math., **24**, (2000), 295 – 311.

- [56] L. Oukhtite (2011), *Posner's second theorem for Jordan ideals in rings with involution*, Expositiones Mathematicae, **29**, (2011), 415 – 419.
- [57] L. Oukhtite (2012), *Generalized Jordan left derivations in rings with involution*, Demonstratio Math., **45**, (2012), 807 – 812.
- [58] L. Oukhtite, A. Mamouni (2012), *Derivations satisfying certain algebraic identities on Jordan ideals*, Arab. J. Math., **1**, (2012), 341 – 346.
- [59] L. Oukhtite, A. Mamouni, (2014) *Generalized derivations centralizing on Jordan ideals of rings with involution*, Turk J. Math., **38**, (2014), 225 – 232.
- [60] L. Oukhtite, A. Mamouni, C. Beddani (2014), *Derivations and Jordan ideals in prime rings*, Journal of Taibah University for Science, **8**, (2014), 364 – 369.
- [61] K. Park, Y. Jung (2002), *Jordan derivations and Jordan left derivations of Banach algebras*, Comm. Korean Math. Soc., **17**, (2002), 245 – 252.
- [62] A. Popov (2013), *Differentiably simple Jordan algebras*, Siberian Math. J., **54**, (2013), 713 – 721.
- [63] E. Posner (1957), *Derivations in prime rings*, Proc. Am. Math. Soc., **8**, (1957), 1093 – 1100.
- [64] N. Rehman, A. Ansari (2014), *On Lie ideals and generalized Jordan left derivations of prime rings*, Ukrainian Mathematical Journal, **65**, (2014), 1247 – 1256.
- [65] R. Sharma, B. Prajapati (2013), *Lie ideal and generalized Jordan left derivation on semiprime rings*, Italian journal of pure and applied mathematics, **30**, (2013), 15 – 22.
- [66] D. Vladeva (2018), *Derivations in endomorphism semirings*, Monograph, Heron Press, (2018).
- [67] D. Vladeva (2018), *All Jordan derivations in a triangle – Part 1*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, **68**, 2, (2018), 99 – 108.
- [68] D. Vladeva (2018), *All Jordan derivations in a triangle – Part 2*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, **68**, 2, (2018), 109 – 118.
- [69] D. Vladeva (2018), *Projections on right ideals of endomorphism semiring of an infinite chain*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, **68**, 3, (2018).

- [70] D. Vladeva (2018), *Projections on left ideals of endomorphism semiring of an infinite chain. Jordan multiplication*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, 68, 3, (2018).
- [71] J. Vukman (1997), *Jordan left derivations on semiprime rings*, Math. J. Okayama Univ., **39**, (1997), 1 – 6.
- [72] J. Vukman (1999), *An identity related to centralizers in semiprime rings*, Comment. Math. Univ. Carolin., **40**, (1999), 447 – 456.
- [73] J. Vukman (2007), *A note on generalized derivations of semiprime rings*, Taiwanese J. Math., **11**, (2007), 367 – 370.
- [74] J. Vukman (2008), *On left Jordan derivations of rings and Banach algebras*, Aequationes Math., **75**, (2008), 260 – 266.
- [75] J. Vukman (2008), *On (m, n) - Jordan derivations and commutativity of prime rings*, Demonstratio Mathematica, **41**, (2008), 773 – 778.
- [76] F. Wei, Z. Xiao (2007), *Generalized Jordan derivations on semiprime rings*, Demonstratio Mathematica, **40**, (2007), 789 – 798.
- [77] F. Wei, Z. Xiao (2011), *Generalized Jordan derivations on semiprime rings and its applications in range inclusion problems*, Mediterr. J. Math., **8**, (2011), 271 – 291.
- [78] Z. Xiao (2015), *Jordan derivations of incidence algebras*, Rocky Mountain J. Math., **45**, (2015), 1357 – 1368.
- [79] X. Xu, H. Zhang (2010), *Jordan left derivations in full and upper triangular matrix rings*, Electronic Journal of Linear Algebra, **20**, (2010), 753 – 759.
- [80] J. Zhang (1998), *Jordan derivations on nest algebras*, Acta Math. Sin. (Chin. Ser.), **41**, (1998) 205 – 212.
- [81] J. Zhu, C. Xiong (2007), *Derivable mappings at unit operator on nest algebras*, Linear Algebra and its Applications, **422**, (2007), 721 – 735.

Author: Stoyan Dimitrov, Ass. Prof. PhD, Department "Mathematical analysis and differential equations", FAMI, Technical University-Sofia, E-mail address: sdimitrov@tu-sofia.bg

Received: October 10, 2018

Reviewer: Prof. PhD Ivan Trendafilov

ПРОЕКЦИИ ВЪРХУ ДЕСНИ ИДЕАЛИ НА ПОЛУПРЪСТЕН ОТ ЕНДОМОРФИЗМИ НА БЕЗКРАЙНА ВЕРИГА

Димитринка Владева

Резюме: В статията се разглеждат нов вид полупръстени – полупръстени от ендоморфизми на безкрайна верига. Проекциите върху някои десни идеали са диференцирания в тези полупръстени.

Ключови думи: ендоморфизми на безкрайна верига, диференциална алгебра, диференцирания в полупръстени.

PROJECTIONS ON RIGHT IDEALS OF ENDOMORPHISM SEMRING OF AN INFINITE CHAIN

Dimitrinka Vladeva

Abstract: In this article are considered a new type semirings – endomorphism semirings of an infinite chain. The projections on some right ideals are derivations in these semirings.

Keywords: endomorphisms of an infinite chain, differential algebra, derivations in semirings.

1 Introduction and preliminaries

The differential algebra has been studied by many authors for the last seventy years and especially the relationships between derivations and the structure of rings. The notion of the ring with derivation is old and plays an important role in the integration of analysis, algebraic geometry and algebra.

Many of results in differential algebra, being important ring theory tools, are one of the sources of the development of such as the theory of differential identities,

theory of Hopf algebra action on rings and Galois theory for linear ordinary differential equations.

Canadian linguist Gabriel Thierrin [6] first consider differential semirings. He proved that the semiring of languages over some alphabet forms an additively idempotent semiring under the operations of union as the addition and catenation as the product. He gave a number of other interesting examples of differential semirings of languages and studied some of their properties, proving that differential semirings are of great interest due to their possible applications. More information for derivation in semirings can be found in survey papers [2], [3] and [4].

The endomorphism semirings of a finite semilattice are well-established, see [1], [5], [7] and [10]. Concerning derivations in endomorphism semiring of a finite chain the reader can refer to [8] and [9].

In this article we investigate the endomorphism semiring of an infinite chain and construct projections on right ideals of this semiring which are derivations.

2 Endomorphisms of an infinite chain

In the set of positive integers $\mathbb{N}$ is defined

$$k \vee \ell = \ell, \text{ where } k, \ell \in \mathbb{N} \text{ and } k \leq \ell.$$

So, $(\mathbb{N}, \vee)$ is an infinite chain. An endomorphism of $(\mathbb{N}, \vee)$ is a map $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, such that

$$\alpha(k \vee \ell) = \alpha(k) \vee \alpha(\ell).$$

Hence, it follows $\alpha(k \vee \ell) = \max\{\alpha(k), \alpha(\ell)\}$ and if $k \leq \ell$, then $\alpha(k) \leq \alpha(\ell)$, that is α is an isotone map.

In the set of endomorphisms $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ we define

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(k) &= \alpha(k) \vee \beta(k), \\ (\alpha.\beta)(k) &= \beta(\alpha(k)), \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ for arbitrary $k \in \mathbb{N}$.

From the first of equalities (1) we have that $(\mathcal{E}_{\mathbb{N}}, +)$ is an idempotent semigroup and from the second equality – that $(\mathcal{E}_{\mathbb{N}}, .)$ is a semigroup. It is easy to prove the left and the right distributivity.

Thus we prove

Proposition 1 *The set of endomorphisms $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is an additively idempotent semiring.*

There is no zero in $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$. An identity in $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is the identity map $\mathbf{i}$, such that $\mathbf{i}(k) = k$ for any $k \in \mathbb{N}$.

Any element of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ can be represented by infinite sequence which terms are positive integers. We write

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

for an arbitrary endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, such that $\alpha(n) = a_n$ for any $n \in \mathbb{N}$. We note that

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots .$$

For any two endomorphisms $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ and $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ their sum and product are:

$$\alpha + \beta = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots),$$

where $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ for $n \in \mathbb{N}$ and

$$\alpha.\beta = (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots),$$

where $d_n = b_{a_n} = \beta(a_n)$ for $n \in \mathbb{N}$.

Remark 1 If we extend the set of positive integers with zero, that is if we consider the infinite chain $(\mathbb{N}_0, \vee)$, where $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, the additive structure of the semiring $\mathcal{E}_{\mathbb{N}_0}$ will be a monoid with neutral element $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$. But the endomorphism $\bar{0}$ is not a zero of the semiring $\mathcal{E}_{\mathbb{N}_0}$, since

$$\bar{0}.\alpha = (a_0, a_0, \dots, a_0, \dots) \neq \bar{0}$$

where $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ and $a_0 \neq 0$.

The endomorphism $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ is called a constant if $a_n = a$ for an arbitrary positive integer n and we denote α by $(a, a, \dots, a, \dots) = \bar{a}$. The set of all constant endomorphisms is denoted by $\mathcal{K}_1(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

It is easy to prove that

Proposition 2 *The set $\mathcal{K}_1(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ is an ideal of the semiring $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.*

The endomorphism $\varepsilon_m = (1, 2, \dots, m-1, m, \dots, m, \dots)$ is called an m -semileft identity, since for an arbitrary endomorphism $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, it follows

$$\varepsilon_m . \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, \dots, a_m, \dots).$$

When $m = 1$ the endomorphism ε_1 is the smallest constant endomorphism.

It is easy to prove that

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_m < .$$

Hence, if $k \leq \ell$, it follows $\varepsilon_k + \varepsilon_\ell = \varepsilon_\ell$. Moreover $\varepsilon_k . \varepsilon_\ell = \varepsilon_\ell . \varepsilon_k = \varepsilon_k$. In particular $\varepsilon_1 . \varepsilon_m = \varepsilon_m . \varepsilon_1 = \varepsilon_1$ for any $m \in \mathbb{N}$.

Thus we have proved

Proposition 3 *The set of m -semileft identities of the semiring $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is a commutative semiring with zero ε_1 .*

Remark 2 By adjoining the identity map $\mathbf{i}$ to the semiring from Proposition 4 we obtain that identity is the largest element of this new semiring, so, it is an incline.

3 Semiconstant endomorphisms

The endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is called $(1, 2)$ -semiconstant, if

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_2, \dots), \quad (2)$$

където $a_1 \leq a_2$. Any constant endomorphism is an $(1, 2)$ -semiconstant. So, for an arbitrary endomorphism α of type (2) we have $|\text{Im}(\alpha)| \leq 2$. The set of $(1, 2)$ -semiconstant endomorphisms is denoted by $\mathcal{K}_{(1,2)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

For a fixed $k \in \mathbb{N}$ the endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is called $(k, 2)$ -semiconstant, ako

$$\alpha = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_k, a_2, \dots, a_2, \dots), \quad (3)$$

where $a_1 \leq a_2$. Any constant endomorphism is a $(k, 2)$ -semiconstant. For an arbitrary endomorphism α of type (3), it follows $|\text{Im}(\alpha)| \leq 2$. The set of $(k, 2)$ -semiconstant endomorphisms is denoted by $\mathcal{K}_{(k,2)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

The endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is called an $(1, 1, 3)$ -semiconstant, if

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3 \dots, a_3, \dots), \quad (4)$$

where $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Any constant and any $(1, 2)$ -semiconstant endomorphism is an $(1, 1, 3)$ -semiconstant. For an arbitrary endomorphism α of type (4) we have $|\text{Im}(\alpha)| \leq 3$. The set of $(1, 1, 3)$ -semiconstant endomorphisms is denoted by $\mathcal{K}_{(1,1,3)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

Let k_1 and k_2 be fixed positive integers. The endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is called a $(k_1, k_2, 3)$ -semiconstant, if

$$\alpha = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k_2}, a_3 \dots, a_3, \dots), \quad (5)$$

where $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Any constant and any $(k, 2)$ -semiconstant endomorphism, where $k = k_1 + k_2$, is a $(k_1, k_2, 3)$ -semiconstant. For an arbitrary endomorphism α of type (5), it follows $|\text{Im}(\alpha)| \leq 3$. The set of $(k_1, k_2, 3)$ -semiconstant endomorphisms is denoted by $\mathcal{K}_{(k_1, k_2, 3)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

Let $m \in \mathbb{N}$ where $m \geq 2$ and $k_1, \dots, k_{m-1}$ be fixed positive integers. The endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is called $(k_1, \dots, k_{m-1}, m)$ -semiconstant, if

$$\alpha = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{a_{m-1}, \dots, a_{m-1}}_{k_{m-1}}, a_m \dots, a_m, \dots), \quad (6)$$

където $a_1 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq a_m$.

The number $\kappa = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$ is called weight and m is called characteristic of the endomorphism α . Note that m is an arbitrary positive integer and $m = 1$ only for constant endomorphisms. The weight of constant endomorphisms is 0. Hence, for any $m \in \mathbb{N}$, it follows $m - 1 \leq \kappa$.

Any constant endomorphism, any $(\kappa, 2)$ -semiconstant endomorphism and any $(k_1, \dots, k_{\ell-1}, \ell)$ -semiconstant endomorphism where $2 \leq \ell \leq m$, of weight equal to κ is a $(k_1, \dots, k_{m-1}, m)$ -semiconstant endomorphism of weight κ .

For an arbitrary endomorphism α of type (6), it follows $|\text{Im}(\alpha)| \leq m$. the set of $(k_1, \dots, k_{m-1}, m)$ -simiconstant endomorphisms is denoted by $\mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

For each $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ we have $\alpha + \beta \in \mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

Let $\alpha \in \mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ and $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ be an arbitrary endomorphism. Then, it follows

$$\alpha\beta = (\underbrace{b_{a_1}, \dots, b_{a_1}}_{k_1}, \dots, \underbrace{b_{a_{m-1}}, \dots, b_{a_{m-1}}}_{k_{m-1}}, b_{a_m}, \dots, b_{a_m} \dots) \in \mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}}).$$

Thus we have

Proposition 4 *Let $m \in \mathbb{N}$ where $m \geq 2$ and $k_1, \dots, k_{m-1}$ be fixed positive integers. Then $\mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ is a right ideal of the semiring $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.*

Remark 3 The set $\mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$, where $m \geq 2$, is only a right ideal. Indeed, let $(1, 2, \dots, 2, \dots)$ be an $(1, 2)$ -semiconstant endomorphism and $(1, 1, 2, \dots, 2, \dots)$ be an $(1, 3)$ -semiconstant endomorphism. Then their product is

$$(1, 1, 2, \dots, 2, \dots) \cdot (1, 2, \dots, 2, \dots) = (1, 1, 2, \dots, 2, \dots)$$

which is an $(1, 3)$ -semiconstant endomorphism.

For a fixed positive integer κ we consider $(k_1, \dots, k_{\ell-1}, \ell)$ -semiconstant endomorphisms, where $2 \leq \ell \leq m$, of weight equal to κ . Hence we can construct strictly ascending chain of right ideals

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{E}_{\mathbb{N}}) \subset \mathcal{K}_{(\kappa, 2)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}}) \subset \dots \subset \mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}}) \subset \dots$$

4 Projections on right ideals of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$

Let $\kappa, m \in \mathbb{N}$ and $k_1, \dots, k_{m-1}$ be positive integers such that $\kappa = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$. We define a map

$$d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)} : \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$$

by the following rule:

For an arbitrary endomorphism $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$

$$d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{a_{m-1}, \dots, a_{m-1}}_{k_{m-1}}, a_m, \dots, a_m, \dots).$$

Note that the sequence $d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha)$ contains at most m different terms and these sequences are convergent in the sense of analysis.

In the next lemma we prove the linearity of $d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}$.

Lemma 1 Let $m \in \mathbb{N}$ where $m \geq 2$ and $k_1, \dots, k_{m-1}$ be fixed positive integers. If $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, it follows

$$d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha + \beta) = d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha) + d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\beta). \quad (7)$$

Proof. Let $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ and $\alpha + \beta = \gamma$. Then $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$, where $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ for $n \in \mathbb{N}$. Hence,

$$d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\gamma) = (\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{c_{m-1}, \dots, c_{m-1}}_{k_{m-1}}, c_m, \dots, c_m, \dots).$$

Since we have

$$\begin{aligned} d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha) &= (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{a_{m-1}, \dots, a_{m-1}}_{k_{m-1}}, a_m, \dots, a_m, \dots), \\ d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\beta) &= (\underbrace{b_1, \dots, b_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{b_{m-1}, \dots, b_{m-1}}_{k_{m-1}}, b_m, \dots, b_m, \dots), \end{aligned}$$

it follows

$$\begin{aligned} &d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha) + d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\beta) = \\ &= (\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{c_{m-1}, \dots, c_{m-1}}_{k_{m-1}}, c_m, \dots, c_m, \dots) = d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\gamma) \end{aligned}$$

and then (7) holds. □

For a fixed positive number m the endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ is called m -differentiable, if

$$\alpha(m) \geq m.$$

If α and β are m -differentiable endomorphisms, then

$$(\alpha + \beta)(m) = \alpha(m) + \beta(m) \geq m \quad \text{and} \quad (\alpha\beta)(m) = \beta(\alpha(m)) \geq \beta(m) \geq m.$$

Hence, if we denote by $\mathcal{D}_m$ the set of m -differentiable endomorphisms of the semiring $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, it follows

Proposition 5 For each positive integer m the set $\mathcal{D}_m$ is a subsemiring of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.

From Proposition 4 and Proposition 5 we obtain

Corollary 1 For each positive integer m the set $\mathcal{K}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\mathcal{D}_m)$ is a right ideal of the semiring $\mathcal{D}_m$.

Let the positive integer m , $m \geq 2$, be a fixed. For each endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ the largest endomorphism $d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha)$ is of the smallest weight κ . This means that $\kappa = m - 1$ or $k_1 = \dots = k_{m-1} = 1$. The mapping $d_{(1, \dots, 1, m)}$ is denoted by d_m .

Remark 4 Since the semiring $\mathcal{D}_m$ consists of endomorphisms α , such that $\alpha(m) \geq m$, the semiring will be closed under the map $d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}$, if the endomorphism $d_{(k_1, \dots, k_{m-1}, m)}(\alpha)$ satisfy the last inequality. For this reason we shall consider only the mappings d_m , where $m \geq 2$.

In the next lemma we prove the Leibnitz rule for the mappings d_m , where $m \geq 2$.

Lemma 2 Let $m \in \mathbb{N}$ where $m \geq 2$ and $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_m$. Then, it follows

$$d_m(\alpha\beta) = d_m(\alpha)\beta + \alpha d_m(\beta). \quad (8)$$

Proof. Let $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ and $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$. Then

$$\alpha\beta = (b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_n}, \dots).$$

From the definition of map d_m we have

$$\begin{aligned} d_m(\alpha) &= (a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, \dots, a_m, \dots), \\ d_m(\beta) &= (b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m, \dots, b_m, \dots), \\ d_m(\alpha\beta) &= (b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_{m-1}}, b_{a_m}, \dots, b_{a_m}, \dots). \end{aligned}$$

We find $d_m(\alpha)\beta = (b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_{m-1}}, b_{a_m}, \dots, b_{a_m}, \dots)$.

Let ℓ be the smallest positive integer such that $a_\ell \geq m$. Then, it follows $b_{a_m} = \beta(a_m) \geq \beta(a_\ell) \geq \beta(m)$. Now we obtain

$$\begin{aligned} \alpha d_m(\beta) &= (b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_\ell}, \dots, b_{a_\ell}, \dots) \leq \\ & (b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_m}, \dots, b_{a_m}, \dots) = d_m(\alpha)\beta. \end{aligned}$$

Hence,

$$d_m(\alpha)\beta + \alpha d_m(\beta) = d_m(\alpha)\beta = d_m(\alpha\beta)$$

and then (8) holds. $\square$

The right ideal $\mathcal{K}_{(1,\dots,1,m)}(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ is denoted by $\mathcal{K}_m(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$.

The right ideal $\mathcal{K}_m(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ (considered as a semiring) contains unique identity – it is the m -semileft identity $\varepsilon_m = (1, 2, \dots, m-1, m, \dots, m, \dots)$.

Theorem 1 *For each $m \in \mathbb{N}$, where $m \geq 2$, the map $d_m : \mathcal{D}_m \rightarrow \mathcal{K}_m(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ is a derivation. The maximal subsemiring S of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, such that the map $d_m : S \rightarrow \mathcal{K}_m(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ is a derivation, is a semiring $\mathcal{D}_m$.*

Proof. From Lemma 1 and Lemma 2, it follows that d_m is a derivation.

It is easy to see that the semiring $\mathcal{K}_m(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ is closed under the derivation d_m . Let $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \mathcal{K}_m(\mathcal{E}_{\mathbb{N}})$ and $\alpha \notin \mathcal{K}_m(\mathcal{D}_m)$. Then $\alpha(m) < m$. Let p be the smallest positive integer such that $p > m$ and $a_p \geq m$. Then, it follows $\beta(a_p) \geq \beta(m) > \beta(a_m)$ or $b_{a_p} > b_{a_m}$. From notations and reasoning in the proof of Lemma 2, it follows

$$\begin{aligned} \alpha d_m(\beta) &= (a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_p, \dots)(b_1, b_2, \dots, b_m, \dots, b_m, \dots) = \\ &= (b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_m}, \dots, b_{a_p}, \dots, b_{a_p}) > (b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_m}, \dots, b_{a_m}, \dots) = d_m(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Hence the equality (8) does not hold, that is $\mathcal{D}_m$ is the maximal subsemiring of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ for which d_m is a derivation. $\square$

Remark 5 The usual operations on derivations d_m , $m \in \mathbb{N}$, are not well-defined in the general case.

For $k, \ell \in \mathbb{N}$ and $k \leq \ell$ the derivation $d_k + d_\ell$ is well-defined only for endomorphisms α , which are k -differentiable and ℓ -differentiable. So, for $\alpha \in \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_\ell$, it follows

$$d_k(\alpha) + d_\ell(\alpha) = d_\ell(\alpha).$$

For $k, \ell \in \mathbb{N}$ and $k < \ell$, the map $d_\ell(d_k)$ is not a derivation, when $d_k(\alpha)$ is not ℓ -differentiable endomorphism.

If $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \leq \ell$ and $\alpha \in \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_\ell$, it follows that $d_k(d_\ell(\alpha))$ is well-defined and then $d_k(d_\ell(\alpha)) = d_k(\alpha)$. As a consequence we have that $d_k^2 = d_k$ for any $k \in \mathbb{N}$.

References

- [1] R. El Bashir, T. Kepka, (2007), *Congruence-Simple Semirings*, Semigroup Forum, 75, 2007, 588 – 608.
- [2] S. Dimitrov (2017) *Derivations on Semirings*, Appl. Math. in Eng. and Econ. – 41th. Int. Conf. 2017, Amer. Inst. of Physics Conference Proceedings 1910, 060011-1 – 060011-22.
- [3] S. Dimitrov (2017) *Jordan derivations on rings and semirings*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, 67, 3, 35 – 44, 2017.
- [4] S. Dimitrov (2018) *Jordan derivations on rings and semirings II*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, 68, 3, 2018.
- [5] Y. Katsov, T. Nam (2011) *Morita equivalence and homological characterization of semirings*, Journal of Algebra and its Applications, 10(3), 445 - 473, 2011.
- [6] G. Thierrin (2001) *Insertion of languages and differential semirings* (Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet), Dordrecht, Kluwer Academic, 2001, 287–296.
- [7] I. Trendafilov, D. Vladeva (2011) *The Endomorphism Semiring of a Finite Chain*, Proceedings of the Technical University of Sofia, vol. 61, no. 1, 2011, 9–18.
- [8] D. Vladeva (2018) *Projections of k -simplex onto the subsimplices of arbitrary type are derivations*, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Tome 71, No 1, 2018, 3 – 9.
- [9] D. Vladeva (2016), *Derivations in a endomorphism semiring*, Serdica Math. J.- Bulgarian Academy of Sciences, Vol.42, No. 3-4, 2016, pp. 251 – 260.
- [10] J. Zumbrägel, (2008), *Classification of finite congruence-simple semirings with zero*, Journal of Algebra and its Applications 7(3), 2008, 363 – 377.

Author: Dimitrinka Vladeva, assoc. prof., Department "Mathematics and physics", LTU, Sofia, *e-mail:* d_vladeva@abv.bg

Received 01 November 2018

Reviewer: Prof. PhD George Venkov

ПРОЕКЦИИ ВЪРХУ ЛЕВИ ИДЕАЛИ НА ПОЛУПРЪСТЕН ОТ ЕНДОМОРФИЗМИ НА БЕЗКРАЙНА ВЕРИГА. ЙОРДАНОВИ УМНОЖЕНИЯ

Димитринка Владева

Резюме: В статията се построяват проекции върху леви идеали на полу-пръстен от ендоморфизми на безкрайна верига и се доказва, че проекциите са диференцирания. Разгледани са Йорданови умножения, които са диференцирания.

Ключови думи: ендоморфизми на безкрайна верига, диференциална алгебра, диференцирания в полупръстени, Йорданови диференцирания.

PROJECTIONS ON LEFT IDEALS OF ENDOMORPHISM SEMRING OF AN INFINITE CHAIN. JORDAN MULTIPLICATIONS

Dimitrinka Vladewa

Abstract: In this article we construct projections on left ideals of endomorphism semiring of an infinite chain and prove that the projections are derivations. Jordan multiplications, which are derivations are considered.

Keywords: endomorphisms of an infinite chain, differential algebra, derivations in semirings, Jordan derivations.

1 Introduction and preliminaries

The differential algebra has been studied by many authors for the last seventy years and especially the relationships between derivations and the structure of rings. The notion of the ring with derivation is old and plays an important role in the integration of analysis, algebraic geometry and algebra.

Canadian linguist Gabriel Thierrin [5] first consider differential semirings. He proved that the semiring of languages over some alphabet forms an additively idempotent semiring under the operations of union as the addition and catenation as the product. He gave a number of other interesting examples of differential semirings of languages and studied some of their properties, proving that differential semirings are of great interest due to their possible applications. More information for derivation in semirings can be found in survey papers [2], [3] and [4].

The endomorphism semirings of a finite semilattice are well-established, see [1], [6] and [10]. Concerning derivations in endomorphism semiring of a finite chain the reader can refer to [8] and [9].

Some of definitions and results of [7] are important tools in this article.

2 Projections on left ideals of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$

Let $a, b \in \mathbb{N}$ and $a < b$. As in [7] the constant endomorphisms, with elements equal to a are denoted by $\bar{a}$. For any $m \in \mathbb{N}$ we denote

$$\alpha_m = (\underbrace{a, \dots, a}_m, b, \dots, b, \dots).$$

The set of endomorphisms

$$\mathcal{STR}\{a, b\} = \{\bar{a}, \bar{b}, \alpha_m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

is called an infinite string.

From definition of sum of endomorphisms, it follows that $\mathcal{STR}\{a, b\}$ is totally ordered since

$$\bar{a} < \alpha_m < \alpha_\ell < \bar{b} \tag{1}$$

for any two positive integers ℓ and m , such that $\ell \leq m$.

Hence we obtain the equalities $\bar{a} + \alpha_m = \alpha_m$ and $\bar{b} + \alpha_m = \bar{b}$ for $m \in \mathbb{N}$. Also we have $\alpha_m + \alpha_\ell = \alpha_\ell$ for any two positive integers ℓ and m , such that $\ell \leq m$.

For multiplication of endomorphisms of $\mathcal{STR}\{a, b\}$, immediately from definition we obtain the properties:

Proposition 1 Let $\alpha_\ell, \alpha_m \in \mathcal{STR}\{a, b\}$, where $\ell < m$.

- a) If $m < a$, then $\alpha_\ell \cdot \alpha_m = \alpha_m \cdot \alpha_\ell = \bar{b}$;
- b) If $\ell < a$ and $a \leq m \leq b$, then $\alpha_\ell \cdot \alpha_m = \alpha_\ell$ and $\alpha_m \cdot \alpha_\ell = \bar{b}$;
- c) If $\ell < a$ and $b < m$, then $\alpha_\ell \cdot \alpha_m = \bar{a}$ and $\alpha_m \cdot \alpha_\ell = \bar{b}$;
- d) If $a \leq \ell < m \leq b$, then $\alpha_\ell \cdot \alpha_m = \alpha_\ell$ and $\alpha_m \cdot \alpha_\ell = \alpha_m$;
- e) If $a \leq \ell \leq b < m$, then $\alpha_\ell \cdot \alpha_m = \bar{a}$ and $\alpha_m \cdot \alpha_\ell = \alpha_m$;
- f) If $b < \ell$, then $\alpha_\ell \cdot \alpha_m = \alpha_m \cdot \alpha_\ell = \bar{a}$.

As a useful consequence of the last proposition we have

Corollary 1 Let $m \in \mathbb{N}$ and $\alpha_m \in \mathcal{STR}\{a, b\}$. Then

- a) $\alpha_m^2 = \bar{b}$, if $m < a$;
- b) $\alpha_m^2 = \alpha_m$, if $a \leq m < b$;
- c) $\alpha_m^2 = \bar{a}$, if $b \leq m$.

It is easy to see that for arbitrary endomorphism $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, it follows $\alpha \cdot \bar{a} = \bar{a}$ and $\alpha \cdot \bar{b} = \bar{b}$.

Let $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ and $\alpha_m \in \mathcal{STR}\{a, b\}$. If $a_1 > m$, then we obtain $\alpha \cdot \alpha_m = \bar{b}$.

Let $a_1 \leq m$ and s is the greatest positive number such that $a_s \leq m$. Then

$$\alpha \cdot \alpha_m = \alpha_s = (\underbrace{a, \dots, a}_s, b, \dots, b, \dots) \in \mathcal{STR}\{a, b\}.$$

From these reasoning, the equality (1) and Proposition 1 we obtain

Proposition 2 For arbitrary two positive integers a and b , such that $a < b$, the infinite string $\mathcal{STR}\{a, b\}$ is a left ideal of the semiring $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.

Remark 1 In the semiring $\mathcal{STR}\{a, b\}$ there are:

- $a - 1$ endomorphisms which are b -nilpotent elements,
- $b - a$ idempotent endomorphisms (different from $\bar{a}$ and $\bar{b}$),
- and all other endomorphisms are a -nilpotent elements.

Let $a, b \in \mathbb{N}$ and $a < b$. We define a map

$$\delta_{ab} : \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{STR}\{a, b\}$$

by following rule

Let $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.

1. If for any $n \in \mathbb{N}$ we have $a_n \leq a$, then $\delta_{ab}(\alpha) = \bar{a}$.
2. If m is the greatest positive number such that $a_m \leq a$, then $\delta_{ab}(\alpha) = \alpha_m$.
3. If $a_1 > a$, then $\delta_{ab}(\alpha) = \bar{b}$.

In the next lemma we prove that δ_{ab} is a linear map.

Lemma 1 *Let $a, b \in \mathbb{N}$ and $a < b$. For arbitrary endomorphisms $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, it follows*

$$\delta_{ab}(\alpha + \beta) = \delta_{ab}(\alpha) + \delta_{ab}(\beta). \quad (2)$$

Proof. Let $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ and $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ are arbitrary endomorphisms.

Case 1. Let for any positive integer n , it follows $a_n \leq a$. Then we obtain $\delta_{ab}(\alpha) = \bar{a}$.

Case 1.1. Let for all $n \in \mathbb{N}$, it follows $b_n \leq a$. Then $a_n + b_n \leq a$ which implies

$$\delta_{ab}(\alpha + \beta) = \bar{a} = \delta_{ab}(\alpha) + \delta_{ab}(\beta).$$

Case 1.2. Let m be the greatest positive number such that $b_m \leq a$.

Then $b_{m+1} > a$. Since $a_n \leq a$ for all $n \in \mathbb{N}$, it follows $a_m + b_m \leq a$ and $a_{m+1} + b_{m+1} = b_{m+1} > a$. Hence m is the greatest positive number such that $a_m + b_m \leq a$. Thus

$$\delta_{ab}(\alpha + \beta) = \alpha_m = \bar{a} + \alpha_m = \delta_{ab}(\alpha) + \delta_{ab}(\beta).$$

Case 1.3. If $b_1 > a$, then $a_1 + b_1 > a$. Hence

$$\delta_{ab}(\alpha + \beta) = \bar{b} = \bar{a} + \bar{b} = \delta_{ab}(\alpha) + \delta_{ab}(\beta).$$

Случай 2. Let m be the greatest positive number such that $a_m \leq a$ and let p be the greatest positive number such that $b_p \leq a$. Without loss of generality we suppose that $m \leq p$. Thus we have $\alpha_m \geq \alpha_p$. Note that m be the greatest positive number such that $a_m + b_m \leq a$. Since $a_{m+1} > a$, then $a_{m+1} + b_{m+1} > a$.

Hence

$$\delta_{ab}(\alpha + \beta) = \alpha_m = \alpha_m + \alpha_p = \delta_{ab}(\alpha) + \delta_{ab}(\beta).$$

Case 3. Let $a_1 > a$. Then $a_1 + b_1 > a$ which implies

$$\delta_{ab}(\alpha + \beta) = \bar{b} = \bar{b} + \delta_{ab}(\beta) = \delta_{ab}(\alpha) + \delta_{ab}(\beta).$$

Hence the equality (2) holds. □

Let a be a fixed positive integer. Let $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ satisfy the following conditions:

1. $\alpha(1) = a$.
2. a is a fixed point of α .

Then if $1 \leq i \leq a$, it follows $\alpha(1) = \dots = \alpha(i) = a$.

We denote by $\mathcal{E}_a$ the set of endomorphisms satisfying the conditions 1. and 2. Let $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_a$. Then we obtain

$$(\alpha + \beta)(a) = \alpha(a) + \beta(a) = a, (\alpha + \beta)(1) = \alpha(1) + \beta(1) = a$$

and moreover

$$(\alpha.\beta)(a) = \beta(\alpha(a)) = \beta(a) = a, (\alpha.\beta)(1) = \beta(\alpha(1)) = \beta(a) = a.$$

Thus we prove

Proposition 3 *The set $\mathcal{E}_a$ is a subsemiring of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.*

Let us consider the set below

$$\mathcal{E}_{ab} = \{\alpha \in \mathcal{E}_a \mid \alpha(b) \leq b\}.$$

Proposition 4 *The set $\mathcal{E}_{ab}$ is a subsemiring of $\mathcal{E}_a$.*

Proof. Let $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{ab}$. Then

$$(\alpha + \beta)(b) = \alpha(b) + \beta(b) \leq b \text{ and } (\alpha\beta)(b) = \beta(\alpha(b)) \leq \beta(b) \leq b$$

and this completes the proof. □

Lemma 2 *Let a and b be positive integers and $a < b$. For arbitrary $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{ab}$, it follows*

$$\delta_{ab}(\alpha\beta) = \delta_{ab}(\alpha)\beta + \alpha\delta_{ab}(\beta). \quad (3)$$

Proof. Let us consider $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ and $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ where $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{ab}$.

Case 1. Let for arbitrary positive integer n , it follows $b_n \leq a$, which implies $\beta = \bar{a}$ and then $\delta_{ab}(\beta) = \bar{a}$. Since $\alpha\beta$ has the same property, it follows $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \bar{a}$. By the same argument $\delta_{ab}(\alpha)\beta = \bar{a}$. Since $\delta_{ab}(\beta) = \bar{a}$, it follows $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \bar{a}$. Thus the two parts of (3) are equal to $\bar{a}$.

Case 2. Let m be the greatest positive integer such that $b_m = a$. Then we have $\delta_{ab}(\beta) = \alpha_m$.

Case 2.1. Let for arbitrary positive integer n , it follows $a_n \leq a$, which implies $\alpha = \bar{a}$ and then $\delta_{ab}(\alpha) = \bar{a}$. Since $m \geq a$, it follows $\alpha\beta = \bar{a}$ and then $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \bar{a}$. From $\delta_{ab}(\alpha) = \bar{a}$ we have $\delta_{ab}(\alpha)\beta = \bar{a}$. Since $m \geq a$, it follows $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \bar{a}\alpha_m = \bar{a}$. (see Proposition 1). Now we obtain, as in the previous case, that the two parts of (3) are equal to $\bar{a}$.

Case 2.2. Let ℓ be the greatest positive integer such that $a_\ell = a$. Then we have $\delta_{ab}(\alpha) = \alpha_\ell$.

Case 2.2.1. Let the inequalities $a \leq \ell \leq m < b$ hold. Then ℓ be the greatest positive integer such that $b_{a_\ell} = a$ and then $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \alpha_\ell$. We obtain $\delta_{ab}(\alpha)\beta = \alpha_\ell\beta = \alpha_\ell$. Since $\delta_{ab}(\beta) = \alpha_m$ and $a \leq \ell$, we find $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \alpha_\ell$. Now the two parts of (3) are equal to α_ℓ .

Case 2.2.2. Let the inequalities $a \leq m \leq \ell < b$ hold. We use the same reasoning as in the previous case. Again, ℓ is the greatest positive integer such that $b_{a_\ell} = a$ and $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \alpha_\ell$. We calculate the products $\delta_{ab}(\alpha)\beta = \alpha_\ell\beta = \alpha_\ell$ and $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \alpha_\ell$. The two parts of (3) are equal to α_ℓ .

Case 2.2.3. Let the inequalities $a \leq \ell < b \leq m$ hold. Since $\alpha(b) \leq b \leq m$, it follows $\alpha\beta = \bar{a}$ and then $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \bar{a}$. By the same reasoning it follows $\delta_{ab}(\alpha)\beta = \bar{a}$. Since $\delta_{ab}(\beta) = \alpha_m$ and $b \leq m$ we find $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \bar{a}$. Now the two parts of (3) are equal to $\bar{a}$.

Case 2.2.4. Let the inequalities $a \leq m < b \leq \ell$ hold. The reasoning are the same as in the Case 2.2.1. Now ℓ is the greatest positive integer such that $b_{a_\ell} = a$ and then $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \alpha_\ell$. We find the products $\delta_{ab}(\alpha)\beta = \alpha_\ell\beta = \alpha_\ell$ and $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \alpha_\ell$.

So, the two parts of (3) are equal to α_ℓ .

Case 2.2.5. Now let the inequalities $a < b \leq \ell \leq m$ or the inequalities $a < b \leq m \leq \ell$ hold. The reasoning are the same as in the Case 2.2.3. Since $\alpha(b) \leq b \leq m$, then $\alpha\beta = \bar{a}$ and $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \bar{a}$. Similarly we have $\delta_{ab}(\alpha)\beta = \bar{a}$. Since $\delta_{ab}(\beta) = \alpha_m$ and $b \leq m$, it follows $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \bar{a}$. Now the two parts of (3) are equal to $\bar{a}$.

Case 3. Let $b_1 > a$. hen $\delta_{ab}(\beta) = \bar{b}$ and $\alpha\delta_{ab}(\beta) = \bar{b}$. Since $b_{a_1} \geq b_1 > a$, it follows $\delta_{ab}(\alpha\beta) = \bar{b}$. Let assume that $\delta_{ab}(\alpha) = (a'_1, \dots, a'_n, \dots)$. Since for all positive numbers n we have $a'_n \leq b$ and $\beta(b) \leq b$, it follows $b_{a'_n} \leq b$ for all n and then $\delta_{ab}(\alpha)\beta \leq \bar{b}$. Hence

$$\delta_{ab}(\alpha\beta) = \bar{b} = \bar{b} + \delta_{ab}(\alpha)\beta = \alpha\delta_{ab}(\beta) + \delta_{ab}(\alpha)\beta$$

and this proves the lemma. $\square$

The main result of the article is the following theorem.

Theorem 1 *Let $a, b \in \mathbb{N}$ and $a < b$. The map $\delta_{ab} : \mathcal{E}_{ab} \rightarrow \mathcal{STR}\{a, b\}$ is a derivation. The maximal subsemiring S of $\mathcal{E}_a$ such that the map $\delta_{ab} : S \rightarrow \mathcal{STR}\{a, b\}$ is a derivation is the semiring $\mathcal{E}_{ab}$.*

Proof. From Lemma 1 and Lemma 2, it follows that the map δ_{ab} is a derivation.

Since the image of arbitrary endomorphism under the derivation δ_{ab} is $\bar{a}$, or α_m for some $m \in \mathbb{N}$, or $\bar{b}$, it follows that the semiring $\mathcal{E}_{ab}$ is closed under the derivation δ_{ab} . Let $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ and $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ be endomorphisms of $\mathcal{E}_a$ and $\beta \notin \mathcal{E}_{ab}$. Let $\beta(b) > b$. Assume that $\beta(b) = c$.

Without loss of generality we suppose that $\alpha \neq \bar{a}$. Let m be the smallest positive integer such that m -th coordinate (m -th term since any endomorphism is a sequence – see [7]) $a_m \geq b$. The endomorphism $\delta_{ab}(\alpha)$ has the same property.

Then the coordinates of $\alpha\beta$ after m -th position are greater than or equal to c . Similarly the coordinates of $\delta_{ab}(\alpha)\beta$ after m -th position are equal to c . Since the coordinates of $\delta_{ab}(\alpha\beta)$ after m -th position are equal to b , it follows that (3) does not hold. $\square$

3 Jordan derivations in $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$

In [7] and in the previous section we construct a projections on right and left ideals of endomorphism semiring of an infinite chain and prove that these projections are derivations. Now we obtain new derivations in endomorphism semiring of an infinite chain. They are Jordan multiplications of the endomorphisms of a fixed type with an arbitrary endomorphism of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.

Let a is a fixed positive integer. We consider the sets below

$$\mathcal{E}_{a\downarrow} = \{\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \mid \alpha(a) \leq a\},$$

$$\mathcal{E}_{a\uparrow} = \{\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \mid \alpha(a) \geq a\}.$$

Proposition 5 *For an arbitrary positive integer a the sets $\mathcal{E}_{a\downarrow}$ and $\mathcal{E}_{a\uparrow}$ are subsemirings of $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.*

Proof. For $\mathcal{E}_{a\downarrow}$ the proof is the same as in Proposition 4. For $\mathcal{E}_{a\uparrow}$ the proof is similar. $\square$

Let $a \in \mathbb{N}$ is a fixed integer and $\bar{a} = (a, \dots, a, \dots)$ the constant endomorphism generated by a .

For an arbitrary endomorphism $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \mathcal{E}_{a\downarrow}$ we consider the Jordan product

$$\bar{a} \circ \alpha = \alpha \bar{a} + \bar{a} \alpha = \bar{a} + \overline{\alpha(a)} = \bar{a}.$$

For any positive integer a we define a map

$$D_a : \mathcal{E}_{a\downarrow} \rightarrow \mathcal{E}_{a\downarrow},$$

such that for arbitrary endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{a\downarrow}$, it follows $D_a(\alpha) = \bar{a} \circ \alpha = \bar{a}$.

Proposition 6 *For arbitrary positive integer a the map $D_a : \mathcal{E}_{a\downarrow} \rightarrow \mathcal{E}_{a\downarrow}$ is a derivation.*

Proof. Let $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{a\downarrow}$. Let $D_a(\alpha) = \bar{a}$, $D_a(\beta) = \bar{a}$ and from Proposition 5 we have $D_a(\alpha + \beta) = \bar{a}$. Hence

$$D_a(\alpha + \beta) = \bar{a} = D_a(\alpha) + D_a(\beta).$$

Since from Proposition 5 we have $D_a(\alpha\beta) = \bar{a}$, it follows

$$D_a(\alpha)\beta + \alpha D_a(\beta) = \bar{a}\beta + \alpha\bar{a} = \overline{\beta(a)} + \bar{a} = D_a(\alpha\beta)$$

and the proposition is proved. $\square$

For an arbitrary endomorphism $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \mathcal{E}_{a\uparrow}$ we consider the Jordan product

$$\bar{a} \circ \alpha = \alpha\bar{a} + \bar{a}\alpha = \bar{a} + \overline{\alpha(a)} = \overline{\alpha(a)}.$$

For any positive integer a we define a map

$$D^a : \mathcal{E}_{a\uparrow} \rightarrow \mathcal{E}_{a\uparrow},$$

such that for an arbitrary endomorphism $\alpha \in \mathcal{E}_{a\downarrow}$, it follows

$$D^a(\alpha) = \bar{a} \circ \alpha = \overline{\alpha(a)}.$$

Proposition 7 *For arbitrary positive integer a the map $D^a : \mathcal{E}_{a\uparrow} \rightarrow \mathcal{E}_{a\uparrow}$ is a derivation.*

Proof. Let $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{a\uparrow}$. Then $D^a(\alpha) = \overline{\alpha(a)}$, $D^a(\beta) = \overline{\beta(a)}$ and from Proposition 5, it follows $D^a(\alpha + \beta) = \overline{(\alpha + \beta)(a)}$.

Hence,

$$D^a(\alpha + \beta) = \overline{(\alpha + \beta)(a)} = \overline{\alpha(a) + \beta(a)} = \overline{\alpha(a)} + \overline{\beta(a)} = D^a(\alpha) + D^a(\beta).$$

From Proposition 5, it follows $D^a(\alpha\beta) = \overline{(\alpha\beta)(a)} = \overline{\beta(\alpha(a))}$.

On the other hand $D^a(\alpha)\beta = \overline{\alpha(a)}\beta = \overline{\beta(\alpha(a))}$.

Since $\alpha D^a(\beta) = \alpha\overline{\beta(a)} = \overline{\beta(a)} \leq \overline{\beta(\alpha(a))}$, we obtain

$$D^a(\alpha)\beta + \alpha D^a(\beta) = \overline{\beta(\alpha(a))} + \overline{\beta(a)} = \overline{\beta(\alpha(a))} = D^a(\alpha\beta)$$

and now the conclusion follows. $\square$

References

1. R. El Bashir, T. Kepka, (2007), *Congruence-Simple Semirings*, Semigroup Forum, 75, 2007, 588 – 608.

2. S. Dimitrov (2017) *Derivations on Semirings*, Appl. Math. in Eng. and Econ. – 41th. Int. Conf. 2017, Amer. Inst. of Physics Conference Proceedings 1910, 060011-1 – 060011-22.
3. S. Dimitrov (2017) *Jordan derivations on rings and semirings*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, 67, 3, 35 – 44, 2017.
4. S. Dimitrov (2018) *Jordan derivations on rings and semirings II*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, 68, 3, 2018.
5. G. Thierrin (2001) *Insertion of languages and differential semirings* (Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet), Dordrecht, Kluwer Academic, 2001, 287–296.
6. I. Trendafilov, D. Vladeva (2011) *The Endomorphism Semiring of a Finite Chain*, Proceedings of the Technical University of Sofia, vol. 61, no. 1, 2011, 9–18.
7. D. Vladeva (2018) *Projections on right ideals of endomorphism semiring of an infinite chain*, Proc. Techn. Univ.-Sofia, 68, 3, 2018.
8. D. Vladeva (2018) *Projections of k -simplex onto the subsimplices of arbitrary type are derivations*, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Tome 71, No 1, 2018, 3 – 9.
9. D. Vladeva (2016), *Derivations in a endomorphism semiring*, Serdica Math. J.- Bulgarian Academy of Sciences, Vol.42, No. 3-4, 2016, pp. 251 – 260.
10. J. Zúñiga, (2008), *Classification of finite congruence-simple semirings with zero*, Journal of Algebra and its Applications 7(3), 2008, 363 – 377.

Author: Dimitrinka Vladeva, assoc. prof., Department "Mathematics and physics", LTU, Sofia, *e-mail:* d_vladeva@abv.bg

Received 01 November 2018

Reviewer: Prof. PhD George Venkov

ИЗСЛЕДВАНЕ НА НЯКОИ ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА МОДИФИЦИРАНЕ НА РЕПЕТИТИВНИ *PI-PID* АЛГОРИТМИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ

Нина Г. Николова

Резюме: В настоящата работа е представен нов вид стратегия за репетитивно управление, за да се подобри динамиката на системата за управление без да се жертва точността ѝ. Предложеният подход е в два варианта: първият е с фундаменталния период, а вторият - една шеста от него. Методът позволява на системата да постигне бърза динамична реакция. Също така към базовия контур се добавя паралелно **PI**-регулатор, за да се елиминират хармониците от произволен ред и да се осигури устойчивост на системата.

Ключови думи: репетитивно управление, управление с вътрешен модел, качество, модули с памет

EXAMINATION OF CERTAIN MODIFICATION OPTIONS ON MODIFIED REPETITIVE *PI-PID* CONTROL ALGORITHMS

Nina G. Nikolova

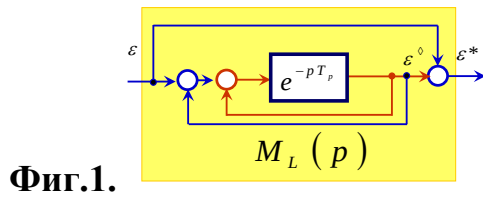
Abstract: In the present work a new kind of repetitive control strategy is presented to improve dynamic performance without sacrificing steady-state accuracy. The proposed approach once requires fundamental period and second one-sixth of it. The proposed method allows the system to achieve a fast dynamic response, and the program occupies minimal storage space. Also to the current control loop is added a **PI**-controller in parallel to eliminate arbitrary-order harmonics and ensure system stability.

Keywords: repetitive control, internal model control, performance, memory loop

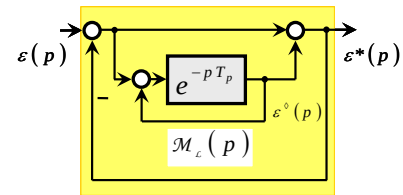
ВЪВЕДЕНИЕ

Репетитивното управление, използващо принципа на вътрешния модел, осигурява практическо решение с висока ефективност [1]÷[13] при необходимост от точно проследяване на периодични входни сигнали или отхвърляне на периодични смущения, чиито параметри (период, честота) са постоянни и предварително известни по стойност на етапа на проектиране на системата. Конвенционалните репетитивни алгоритми използват последователна репетитивна модификация на **PID**-алгоритми с ML-модул с памет, който се състои от генератор на периодичен сигнал, позволяващ компенсацията на периодичните смущения в системата за управление.

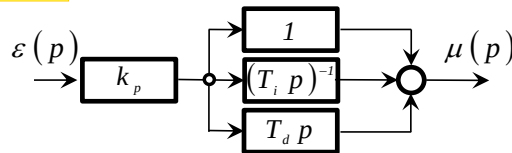
Известни са свойствата и характеристиките на: базов ML-филтър (фиг.1) [1]÷[13]; усъвършенстван ML-филтър (фиг.2) [9]÷[13]; класически **PID**-алгоритми (фиг.3) и репетитивните **PID**-алгоритми с последователна репетитивна модификация (фиг.4) [9]÷[13], реализирана с ML-модул с памет.



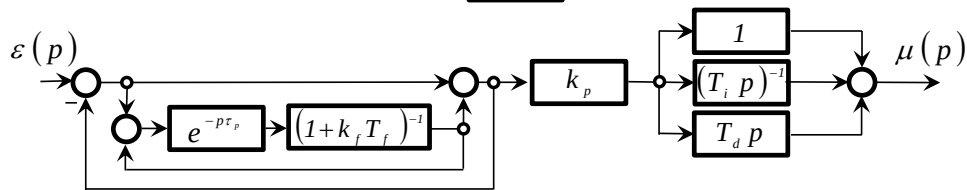
Фиг.1.



Фиг.2.



Фиг.3.



Фиг.4.

$$M_L(p) = \frac{\varepsilon^{\diamond}(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{e^{-pT_p}}{1 - e^{-pT_p}} \quad (1)$$

$$\mathcal{M}_L(p) = \frac{\varepsilon^*(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{e^{-pT_p}}{2 - e^{-pT_p}} \quad (2)$$

$$R_{PID}(p) = k_p \left(1 + (T_i p)^{-1} + T_d p \right) \quad (3)$$

$$R_{PID}^{rep}(p) = R_{PID} rep = k_p \left(2 - e^{-pT_p} (1 + k_f T_f) \right)^{-1} \left(1 + (T_i p)^{-1} + T_d p \right) \quad (4)$$

Обикновено репетитивния регулатор осигурява високи коефициенти за всички хармонични честоти. Като се има предвид, че електронните системи съдържат главно нечетни хармоници, в литературата [10], [11] са предложени репетитивни регулатори, предназначени да компенсират само нечетни хармоници. В тях време закъснението се намалява до половината от фундаменталния период, което може да се разглежда като подобрение на системната динамика. При трифазните мощности например хармоничните компоненти обикновено се концентрират в кратни от $6n \pm 1$ от фундаменталната честота. Затова са известни [12], [13] и модели на репетитивни регулатори, които използват паралелна комбинация от $(6n+i)$, $(i = 0,1,2,3,4,5)$ вътрешни хармонични модели за елиминиране на $(6n+i)$ хармоници. Тези методи обаче не могат ефективно да компенсират четните хармоници, тъй като коефициентите на регулатора не са достатъчно високи при тези честоти.

Въз основа на гореизложеното, настоящата разработка си поставя за цел да предложи и изследва свойствата и характеристиките на нова паралелно-последователна структура на ML-контури, както и нейната паралелна репетитивна модификация с **PID**-алгоритми.

СИНТЕЗ НА РЕПЕТИТИВНИ МОДУЛИ

В работата се предлага конфигурация на **нов клас** модифицирана паралелно-последователна структура на филтър с памет (фиг.5), като част от репетитивно управление. Тя се отличава от известните по това, че съдържа в структурата си освен усъвършенствания ML -модул и втори модел на закъснението. Коефициентът във филтъра трябва да е $k_{M_L} < 1$.

$$\mathcal{M}_{Lb}(p) = \frac{e^{-p\tau_p} S_k}{1 - e^{-p\tau_p} (S_k + k_{M_L})} \quad (5)$$

$$\mathcal{M}_{Ls}(p) = \frac{e^{-p\tau_p/6} S_k}{1 - e^{-p\tau_p/6} (S_k + k_{M_L})} \quad (6)$$

Време закъснението в конвенционалните ML -филтри съответства на периода T_p на повторение на сигналното смущаващо въздействие. Поради наличието на време закъснение, конвенционалният репетитивен регулатор има много бавен преходен процес, което е причина за трудното хармонично компенсиране при условия на бързи колебания. Този вид регулатори са предназначени да премахнат, както четните, така и нечетните хармоници, за сметка на въвеждането на фундаментално забавяне на периода. Бързодействието на репетитивния регулатор, може значително да бъде увеличено, без да се жертва постигането на устойчивост, ако време закъснението във филтъра се намали до една шеста от основния период. По този начин репетитивният регулатор ще осигури по-бърза динамика от конвенционалния. Освен това този нов бърз преходен, репетитивен регулатор може да избегне усилването, както на $(6n \pm 1)$ хармониците, така и на други хармоници.

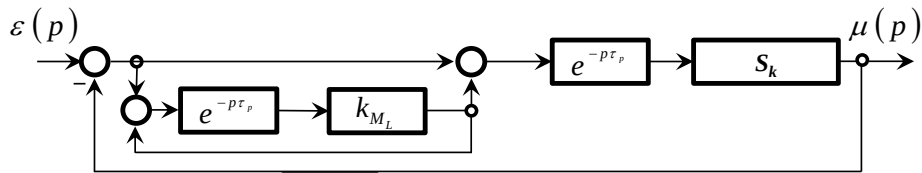
Във връзка с това ще бъдат изследвани свойствата на модифицирания филтър с памет (фиг.5) в два варианта: с времезакъснение съответстващо, както на T_p - $\mathcal{M}_{Lb}$ (5), така и на $T_p/6$ - $\mathcal{M}_{Ls}$ (6). Основният и бързодействащия модифицирани репетитивни контури, по подобие на [8], ще се комбинират в паралел с **PID**-алгоритъм с изключена **D**-съставка (фиг.6), който ще компенсира коригирането на четните хармоници. **PI**-управлението има бърза динамика и добра възможност за проследяване на сигнали. Увеличаването на коефициента на регулатора спомага за подобряване на проследяването на променлив сигнал, но голямото усилване често причинява резонансен проблем.

Проблемът с резонанса може да бъде избегнат, чрез използване на подходящо проектиран коректор s_k , който ще увеличи границата на устойчивост на системата и ще позволи поддържане на точност на проследяване на текущата компенсация. Проектирането и прилагането на този компенсатор в структурата на репетитивния регулатор не влияе върху характеристиките му, а параметрите му са в пряка зависимост от параметрите на управлявания процес, затова ще е обект на последващи изследвания (за целите на настоящото изследване се приема $s_k = 1$).

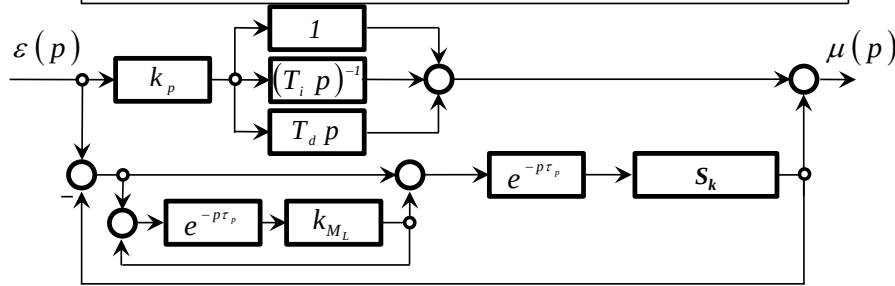
ИЗСЛЕДВАНЕ НА СВОЙСТВАТА И ХАРАКТЕРИСТИКИТЕ НА МОДИФИЦИРАНИ РЕПЕТИТИВНИ КОНТУРИ

Характеристиките на основния и бързодействащ модифицирани репетитивни **ML**-контури $\mathcal{M}_{Lb}$ и $\mathcal{M}_{Ls}$, като лентови отсичащи филтри, са показани в сравнителен план, като е изследвано и влиянието на коефициента k_{M_L} върху свойствата им (фиг.7). Ясно се виждат техните филтриращи свойства (фиг.7.b,c,d), но намаляването на коефициента води до влошаване на преходните процеси (фиг.7.a). Препоръчва се k_{M_L} да е със стойност близка до 1.

Характеристиките на основния $\mathcal{M}_{Lb}$ и бързодействащия $\mathcal{M}_{Ls}$ модифицирани репетитивни **ML**-контури, като лентови отсичащи филтри, са показани в сравнителен план с базовият и усъвършенстван филтри с памет на фиг.8. Освен филтриращите свойства (визуализирани с честотните характеристики - фиг.8.b,c,d), ясно се вижда подобряването на бързодействието (визуализирано с преходната характеристика - фиг.8.a).



Фиг.5.



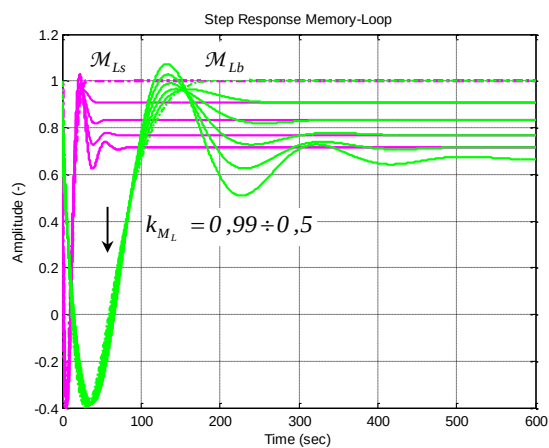
Фиг.6.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА СВОЙСТВАТА НА МОДИФИЦИРАНИ РЕПЕТИТИВНИ РЕГУЛАТОРИ

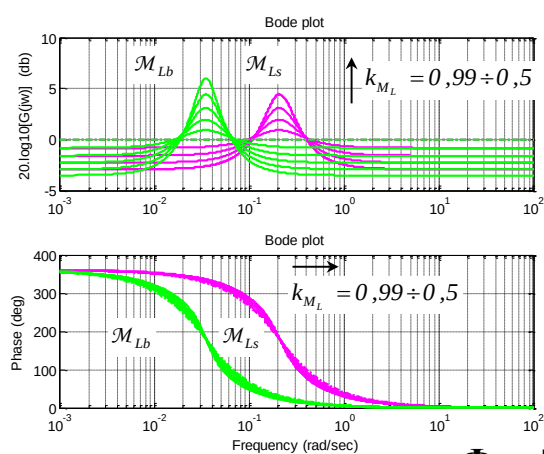
В този раздел е направено изследване на основен R_{PID}^{rep-b} и бързодействащ R_{PID}^{rep-s} модифицирани репетитивни регулатори с **PI**-алгоритми. За тяхната реализация основният и бързодействащия модифицирани филтри с памет се комбинират в паралел с **PID**-алгоритъм с изключена **D**-съставка. Структурата на репетитивния регулатор е визуализирана на фиг.6, а предавателните им функции са описани със (7) и (8).

$$R_{PID}^{rep-b}(p) = k_p \left(1 + (T_i p)^{-1} + \frac{e^{-p\tau_p} S_k}{1 - e^{-p\tau_p} (S_k + k_{M_L})} \right) \quad (7)$$

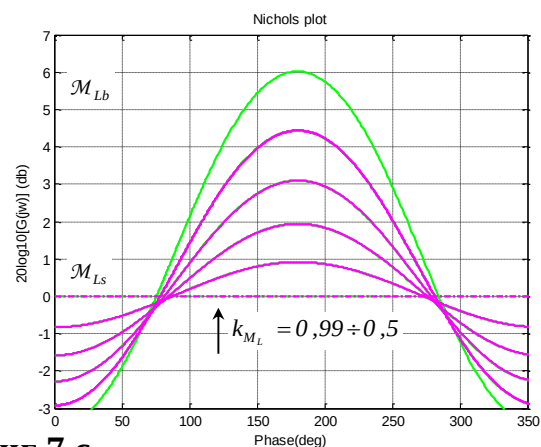
$$R_{PID}^{rep-s}(p) = k_p \left(1 + (T_i p)^{-1} + \frac{e^{-p\tau_p/6} S_k}{1 - e^{-p\tau_p/6} (S_k + k_{M_L})} \right) \quad (8)$$



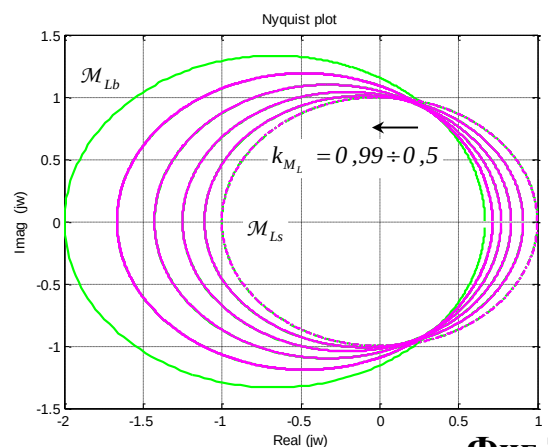
Фиг.7.а.



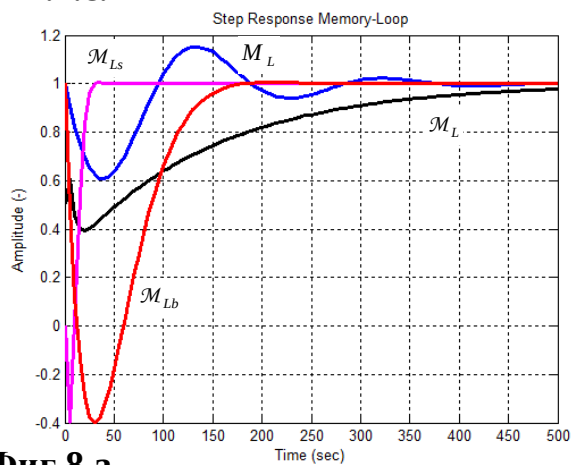
Фиг.7.б.



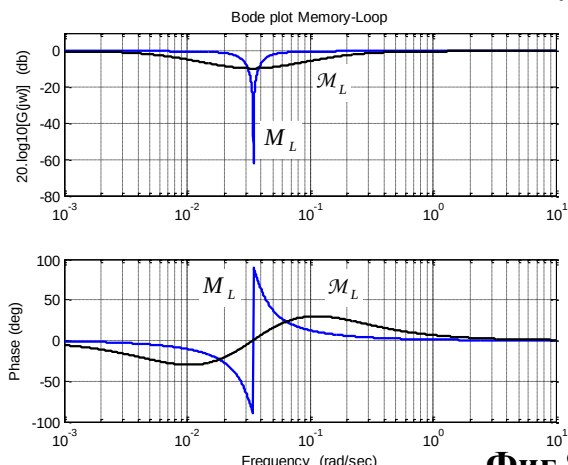
Фиг.7.с.



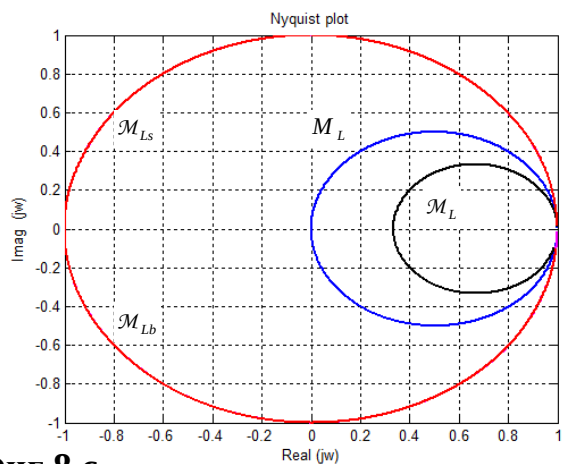
Фиг.7.д.



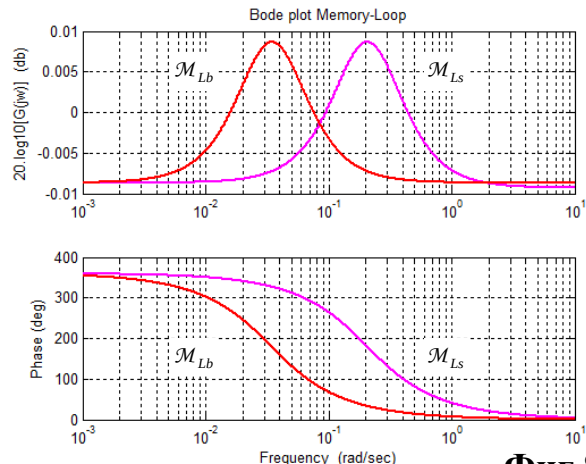
Фиг.8.а.



Фиг.8.б.

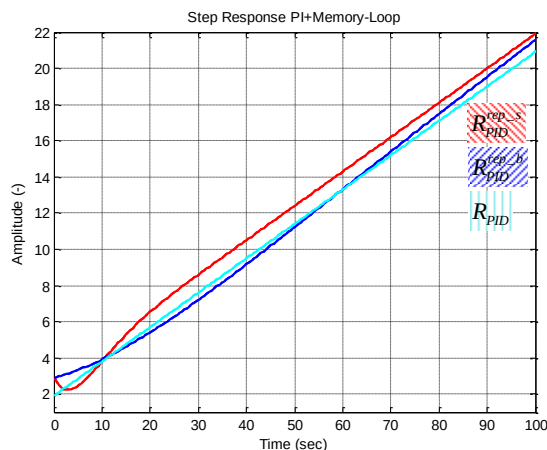


Фиг.8.с.

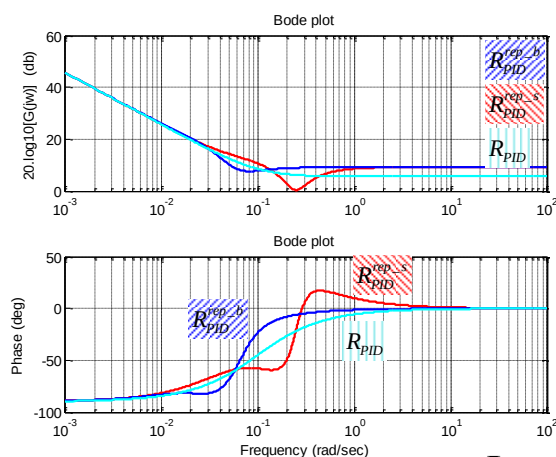


Фиг.8.д.

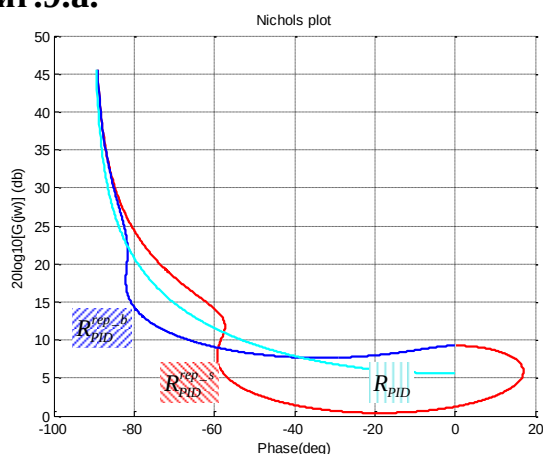
Проектирането на репетитивните регулатори $R_{PID}^{rep_b}$ (7) и $R_{PID}^{rep_s}$ (8), (фиг.6) е в две взаимно несвързани фази. Първата от тях е синтезът на базовия **PID**- алгоритъм, чиито параметри са в пряка зависимост от параметрите на управлявания процес, а втората - на репетитивните модули: $\mathcal{M}_{Lb}$ - основния или $\mathcal{M}_{Ls}$ - бързодействащия. Функционалните възможности на репетитивните регулатори са показани с техните времеви и честотни характеристики на фиг.9.



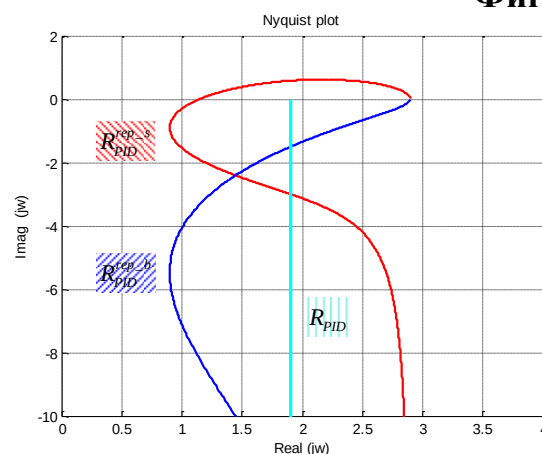
Фиг.9.а.



Фиг.9.б.



Фиг.9.с.



Фиг.9.д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новото и оригинално, представено в работата, се определя с това, че:

- е предложена структурна конфигурация на нов клас (фиг.5) репетитивни филтри с памет $\mathcal{M}_{Lb}$ (5) и $\mathcal{M}_{Ls}$ (6), която се отличава от известните до сега с това, че съдържа в структурата си освен усъвършенствания ML-модул и втори модел на закъснението. Използвани са два варианта на модифицирания филтър: основен $\mathcal{M}_{Lb}$ (5) - с време закъснение съответстващо на периода T_p на сигналните хармонични смущаващи въздействия и бързодействащ $\mathcal{M}_{Ls}$ (6) - с време закъснение съответстващо на $T_p / 6$;
- е предложена структурна конфигурация на нов клас репетитивни **PI-PID**-регулатори $R_{PID}^{rep_b}$ (7) и $R_{PID}^{rep_s}$ (8), (фиг.5), които за разлика от известните съчетават в паралел (вместо последователно) управление на класически **PI**-алгоритъм и предложените модифицирани репетитивни филтри с памет;

- са проектирани (конкретен числен пример) предложените репетитивни филтри и репетитивни регулатори, които са моделирани, симулирани и анализирани в аспект на филтриращи свойства;
- са моделирани, симулирани и анализирани представителните характеристики на предложените: нов клас (фиг.5) репетитивни филтри с памет и нов клас репетитивни **PI-PID**-регулатори (фиг.6).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gricy R., R. Cardoner, Ramon Costa-Castelló, E. Fossas (2007), Digital repetitive control of a three-phase four-wire shunt active filter, IEEE Transactions on Industrial Electronics 54 (3), 1495-1503
- [2] Dötch, H. G. M., Smakman, H. T., Van den Hof, P. M. J., & Steinbuch, M. (1995), Adaptive repetitive control of a compact disc mechanism. Proceedings of the IEEE conference on decision and control, New Orleans, pp.1720–1725
- [3] Manayathara, Th. J., Tsao, T.-C., Bentsman, J., & Ross, D. (1996), Rejection of unknown periodic load disturbances in continuous steel casting process using learning repetitive control approach, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 4(3), 259–265
- [4] Maarten Steinbuch (2002), Repetitive control for systems with uncertain period-time Automatica 38, 2103-2109
- [5] Tsao, T. C., Nemani, M. (1992), Asymptotic rejection of periodic disturbances with uncertain period. Proceedings of the American control conference, pp. 2696-699
- [6] Longman, Richard W. (2010), On the Theory and Design of Linear Repetitive Control Systems, European Journal of Control, vol. 5, DOI: 10.3166/EJC.16, pp 447-496
- [7] Hsin YP, Longman RW. (2003), Repetitive control to eliminate periodic measurement disturbances: application to disk drives. Adv Astronaut Sci 2003; 114: 135-150
- [8] Zeng, Zh., Jia-Qiang Yang, Shi-Lan Chen, Jin Huang, (2014), Fast-Transient Repetitive Control Strategy for a Three-phase LCL Filter-based Shunt Active Power Filter, Journal of Power Electronics, Vol. 14, No. 2, pp. 392-401
- [9] Nikolova N., Nikolov E. (2007), **ML**- Structures In The Repetitive Robust Control Systems, Cybernetics and Information Technologies Journal, Vol. 8, No 2, BAS, 15-28
- [10] Николова Н. Г. (2013), Филтри в репетитивните системи за управление, Journal Proceedings of the Technical University Sofia, International Conference Automatics'2013, FA, June 14-16, Sozopol, Publishing House of Technical University of Sofia, ISSN 0374-342X, ISSN 1311-0829, Vol 63, (2), pp. 45-52
- [11] Николова Н., Е. Николов (2014), Предиктивно-репетитивно управление (приложни методи за управление на технологични процеси-III част), изд. Технически университет София, ISBN 978-619-167-136-6, стр. 157

[12] Нина Николова (2015), Приложение на репетитивни хиперболични филтри в системите за управление - I част, Годишник на Технически Университет-София, Том 65, книга 2, Юбилей “70 години Технически Университет - София“, ISSN 0374-342X, ISSN 1311-0829, pp. 137-146

[13] Нина Николова (2015), Приложение на репетитивни хиперболични филтри в системите за управление - II част, Годишник на Технически Университет-София, Том 65, книга 2, Юбилей “70 години Технически Университет - София“, ISSN 0374-342X, ISSN 1311-0829, pp. 147-156

Автор: Нина Г. Николова, доц. д-р, катедра „Автоматизация на Непрекъснатите Производства“, Факултет Автоматика, Технически Университет-София; E-mail address: ninan@tu-sofia.bg

Постъпила на 29.10.2018 г.

Рецензент: проф. дтн. Емил Николов

СЛЕДЕНЕ НА ТРАЕКТОРИЯ ОТ МОБИЛЕН РОБОТ ZUMO

Владимир Христов, Стоян Дурчев

Резюме: В настоящата статия е показана възможността за следене на траектория от мобилен робот Zumo. Следенето на траектория се осъществява посредством инфрачервен датчик, който включва в себе си 6 отделни инфрачервени сензора. Направени са две арени с две концептуално различни траектории на следене, като са реализирани изследвания в двете посоки на движение на робота при четири различни скорости на движение. Разработен е алгоритъм чрез, който да се осъществява следенето на траекторията, написан е сорс код и е зареден в микроконтролера Ардуино на Zumo. Направен е анализ на получените резултати от експерименталните изследвания и са направени препоръки за бъдеща работа.

Ключови думи: мобилен робот ZUMO, следене, траектория, арена, инфрачервен сензор, Arduino

TRACEABILITY TRACKING OF MOBILE ROBOT ZUMO

Vladimir Hristov, Stoyan Durchev

Abstract: In This article shows the ability to track a Zumo mobile robot trace. Trace tracking is performed using an infrared sensor that includes 6 separate infrared sensors. Two arenas were constructed with two conceptually different tracking trajectories, with exploration in both directions of motion of the robot at four different speeds of movement of the robot. An algorithm has been developed to track trace, written source code, and is loaded into Zumo Arduino microcontroller. An analysis of the results of the experimental studies was made and recommendations for future work were made.

Keywords: mobile robot ZUMO, tracking, trajectory, arena, infrared sensor, Arduino

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Мобилните роботи представляват комплексни системи, които съдържат множество различни сензори и изпълнителни механизми и се характеризират най-вече с [1,2]:

- програмируемо управление;
- адаптивност към непредвидимо обкръжение;
- дистанционно управление.

Мобилните роботи повишават човешките възможности, тъй като тяхното управление може да се извърши както в реално време така и офлайн [1,2]. Особено при системите, работещи в реално време е, че обработката на информацията и управлението се извършват в зависимост от външни събития, настъпващи в предварително неизвестни моменти от време [3]. Реакцията на всяко събитие включва последователност от процедури, които се изпълняват в строги интервали от време. Системите могат да работят дълго време автономно без външна намеса (за приемане на данни или подаване на задание) [4]. Мобилността на роботите силно разширява обема на работната сцена и разнообразието на обекти, задачи и условия на действие. Функционалността им зависи предимно от адаптивността, придвижване в пространството и от обхвата и рационално възприемане на сцената на действие [5].

Мобилните роботи интегрират възможностите на ултразвуковите, инфрачервените и лазерните далекомири, лазерните скенери и визуалните системи за геометрично и структурно възприемане на сцената [1,2,7]. Собственото положение се определя по кинематичните параметри на локомоторите или чрез инерциални сензори, компаси и GPS [1,6,7]. Особено актуални в последно време са мобилните роботи – прахосмукачки, които набират все по голяма популярност сред обществото. Тези устройства са снабдени с много сензори, които дават възможност робота да избягва сблъсъци с околни предмети и стени.

1. 2. ПРЕДСТАВЯНЕ НА МОБИЛЕН РОБОТ Zumo

Pololu Zumo е верижна робо-платформа, предназначена да се контролира от Ардуино или Ардуино съвместими микроконтролерни платки фиг.1.



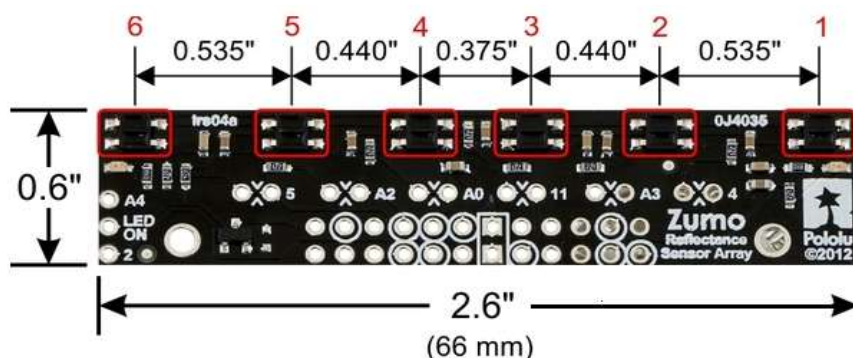
Фиг.1. Робот Zumo.

Задвижва се с два метални микро мотор-редуктора 75:1HP и достига скорост до 60см/сек, което го прави доста бърз. В предната част има монтирани лазерно изрязана броня от неръждаема стомана за избутване на “противника“ и рефлекторен сензор с шест IR-LED елемента, служещ за откриване на ръба на арената (може да се използва и като сензор за близост или сензор за следене на линия) [3]. Има драйвер за управление на двата редуктора DRV8835, 3-осов акселерометър и компас LSM303D, 3-осов жирокоп L3GD20H, PWM контролиран пие-

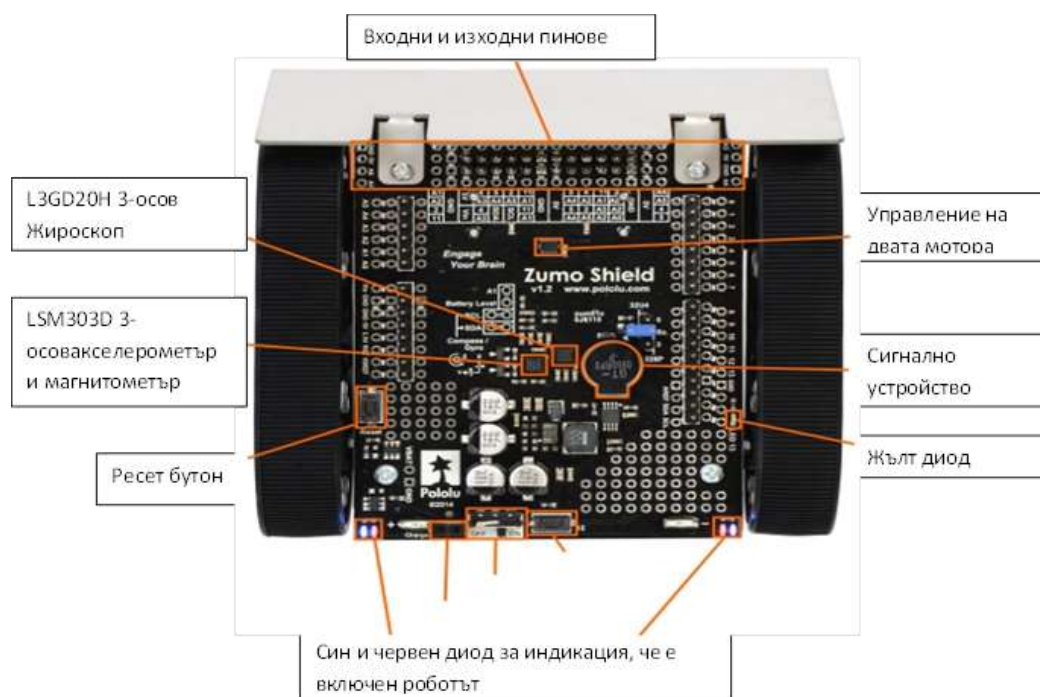
зозумер, бутон за рестартиране, светодиоди в ъглите, повишаващ регулатор 7,5V за осигуряване на стабилно захранващо напрежение от батериите и конектор за рефлекторния сензор, намиращ се под бронята [3]. С компактните си размери 98мм x 98мм и тегло 165гр (около 300гр с батерии и платка АрдуиноУно), роботът покрива критериите за участие в мини-сумо състезания. Съответно, може да се използва и като робот за: следене на линия, за решаване на лабиринти, автономен робот и др.

Фиг.2. Схемата DRV8835 за управление на двата мотор в Zumo.

3. IR СЕНЗОР ЗА СЛЕДЕНЕ НА ТРАЕКТОРИЯ ОТ Zumo



Сензорът е предназначен да се монтира на Zumo робота, като не се нуждае от допълнителни компоненти за да работи безпроблемно. Използва се като сензор за следене на линия, сензор за близост, сензор за отчитане края на арената при сумо и др. Има удобно решение за контролиране захранването на IR-светодиодите с MOSFET транзистор, ако не се изисква постоянна работа на сензора. Теглото на датчика (без конекторите) е 3,6гр., което го прави доста лек при добавянето му към общото тегло на робота. Сензора е предвиден да бъде монтиран върху оградената област с Входно-изходни пинове на дъното на мобилния робот показан на фиг.4. На фигурата са показани разположението на основните модули, които притежава робота.



Фиг.4. Поглед отдолу робота Zumo.

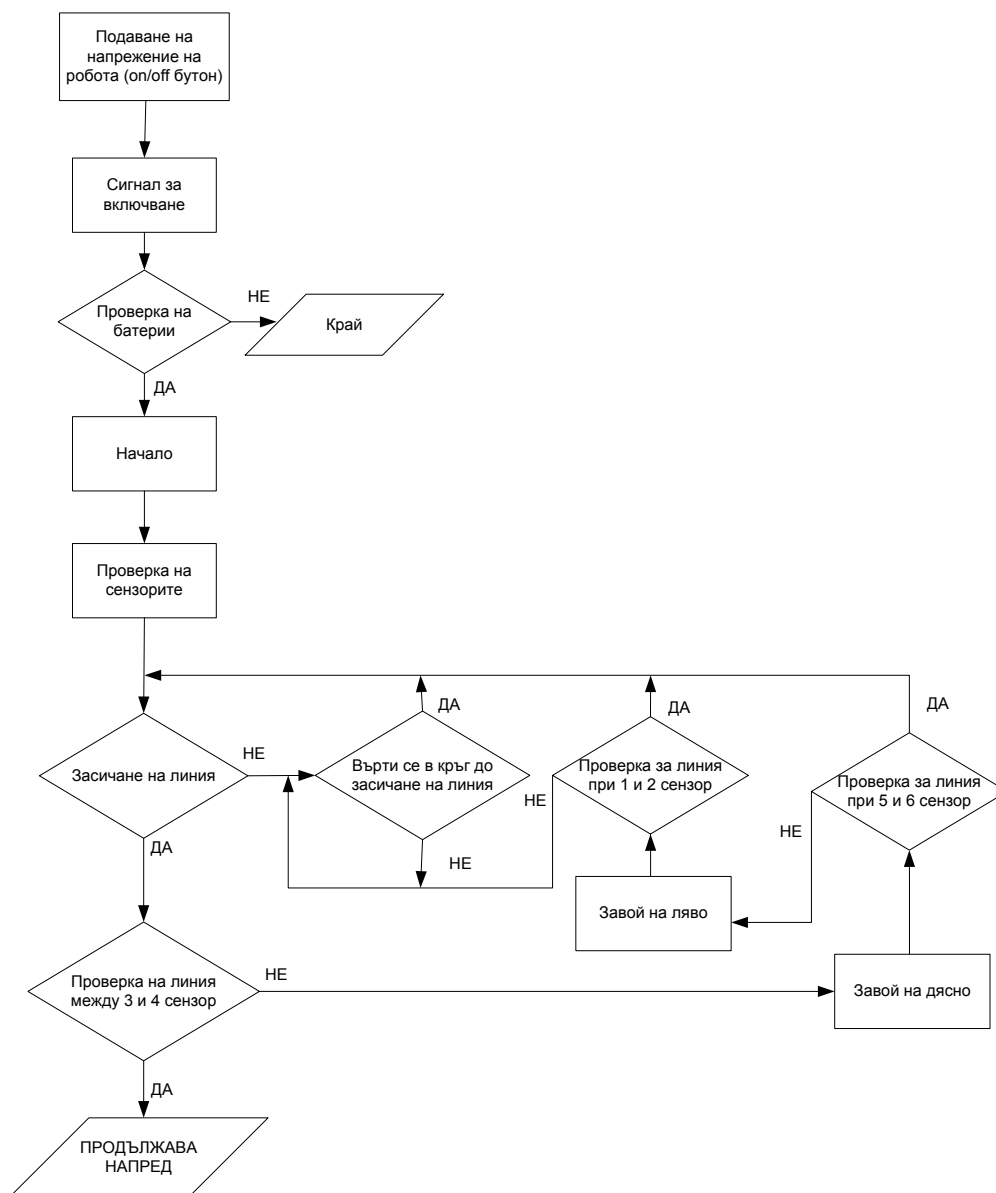
4. АЛГОРИТЪМ ЗА СЛЕДЕНЕ НА ТРАЕКТОРИЯ ОТ МОБИЛЕН РОБОТ Zumo

Алгоритъмът, чрез който ще бъде изграден следенето на траекторията, притежава следната логика: при подаване на напрежение от ключа робота сигнализира, че е включен и инициализира сензорите за наличие на линия при команда старт и тръгва по линията, така че тя да бъде в средата между трети и четвърти сензор.

При липса на трети сензор предстои завой надясно, тогава пети и шести сензор засичат линията.

При липса на четвърти сензор предстои завой наляво, тогава първи и втори сензор засичат линията.

При липса на линия при шеста сензора робота се върти в кръг. Блоквата схема на алгоритъма е показан на фиг.5.



Фиг.5. Блокова схема на алгоритъма за следене на траектория.

5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ

За експериментално изследване на следенето на траектория от робота са съставени 2 арени с две различни траектории, като при първата арена ще има 4 завоя на 90° , а останалите ще бъдат по-големи от 90° . Траекторията на втората арена ще бъде изградена със завой доста по-малки от 90° (по-малки дори от 45°), с цел изследване на възможности за следене на по-сложни траектории. Размера на арените върху, което са поместени траекторията за следене е с размери : дължина 1250мм широчина 670мм, а дължина на първата траектория е 2950мм, а дължина на втората траектория е 2870мм.

Експерименталните изследвания ще включват 8 изследвания (4 в едната посока и 4 в другата посока на движение на робота, тъй като сензорите са стационарно разположение в единия край на робота. По този начин сензорите ще трябва да са отпред към посоката на движение, а в другия случай отзад към посоката на

движение). За всяко изследване (посока напред и посока назад) е предвидено по 5 опита с различни зададени скорости на движение (100см/сек; 200см/сек; 300см/сек; 400см/сек). Експериментите са базирани на постоянно увеличаване на скоростта на робота в двете посоки на движение, като е отчетено времето на движение и успешните опити на движение по траекторията.



Фиг.6. Траектория № 1.

Таблица 1

Резултати от опитите върху Траектория № 1

За неуспешни опити се водят всички случай при, които робота е излязъл извън траекторията на движение и не е успял да се върне, както и случаите, при които при ниска скорост няколко сензора по едно и също време засичат траекторията и робота се обръща и поема в обратна посока, което се води за неуспешен опит.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЯ

На база от направените опити и обобщените резултати се забелязва, че има връзка между посоката на движение (разположението на датчиците) и успешните опити. Прави впечатление, че посоката и скоростта на мобилния робот, трябва да бъде съобразена според траекторията, по която се придвижва. При траектория 1 се наблюдават повече успешни опита, тъй като завоите са по-плавни и сензорите успяват на време да подадат обратна връзка към микроконтролера. При траектория 2 се наблюдават повече неуспешни опити поради по-острите завои и при по-висока скорост робота излиза от пистата и сензорите не засичат траекторията. При ниска скорост се получава ефекта, че няколко сензора по едно и също време засичат траекторията и робота се обръща и поема в обратна посока, което води до неуспешни опити, това оформя и взаимовръзката между широчината на траекторията и успешните опити на робота. При следене на траектория с доста по-остри завои ($<90^\circ$) е необходимо да бъдат добавени и допълнителни сензори така, че да може робота да се ориентират по-добре при излизане от траекторията, както и скоростта да бъде регулируема при навлизане в такива участъци ($<90^\circ$).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Заманов, Мобилни роботи. Локомоционни системи, София: Изд. на ТУ-София, 2012, с.66.
- [2] В. Заманов, Ат. Димитров и С. Симеонов, Развитие на сензорната система на изследователски мобилен робот, Сб. с доклади от МК АВТОМАТИКА „2012”, Созопол, 1-4 юни 2012, том 62, книга 2, pp.303-312
- [3] <https://erelement.com/robots/pololu-zumo-robot>
- [4] V. Zamanov, A. Nikolov, M. Gavrilo, Omni mobile wireless controlled platform, proc. Of int. Conf robotics, automation and mechatronics`12, Sofia, 15-17 October 2012, pp. r16-r19.
- [5] At. Dimitrov, V. Zamanov, Ranging system of remote control tracked robot, proceeding. of int. Conf robotics, automation and mechatronics`12, Sofia, 15-17 October 2012, pp. r1-r4.
- [6] В. Николов, В. Заманов, Bluetooth/wi-fi управление на робот с повишена мобилност, Сб. с доклади от МК автоматика`2012, ФА, Созопол, 1-4 юни, 2012г., том 62, книга 2, с.297-302.
- [7] Николов В., Заманов В., Wi-Fi верижен мобилен робот, Механика на Машините 96, ISSN 0861-9727, Год.ХХ, Кн.1, ТУ Варна, 2012, с.42-45.

Автори: Владимир Христов, гл. ас. д-р инж., катедра: Автоматизация на електрозадвижванията“, Факултет Автоматика, Технически Университет-София; E-mail address: vdhristov@tu-sofia.bg ; Стоян Дурчев, студент катедра: Автоматизация на електрозадвижванията“, Факултет Автоматика, Технически Университет-София

Постъпила на 29.10.2018 г.

Рецензент: проф. дтн. Емил Николов

КАСКАДНО ЛИНЕЙНО КВАДРАТИЧНО УПРАВЛЕНИЕ НА НИВОТО НА ФЛУИД В РЕЗЕРВОАР

Цоньо Славов, Мирослава Барахарска

Резюме: В работата е представена разработената полупромишлена система за каскадно линейно-квадратично гаусово управление на нивото на вода в резервоар. Обект на управление е физически модел на резервоар произведен от фирмата Lucas Nulle. За синтеза на регулаторите в каскадната схема със средствата на идентификацията са разработени модели от нисък ред. Вътрешният контур на системата осъществява регулиране на дебита на водата, постъпваща в резервоара с ПИ регулатор. Външният контур осъществява управление на нивото на водата в резервоара с помощта линейно-квадратичен регулатор с ПИ филтър на Калман. Разработените регулатори са реализирани в стандартен програмируем логически контролер (PLC) M258 на фирмата Schneider Electric. Представени са резултати както от симулацията на системата за управление, така и от реални експерименти

Ключови думи: LQG управление, PLC управление, ПИ филтър на Калман

CASCADE LQG CONTROL OF FLUID LEVEL IN TANK

Tsonyo Slavov, Miroslava Baraharska

Abstract: In this paper, the developed system for cascade LQG control of fluid level in tank is presented. The plant is a physical laboratory model of a water tank. The cascade LQG controller is designed on the basis of obtained by identification linear models. The designed control algorithms are embedded in PLC M258 produced by Schneider Electric Company. Simulation and experimental results are given that confirm the workability of the control system in whole working range

Key-words: LQG control, PLC control, PI Kalman filter

1. ВЪВЕДЕНИЕ

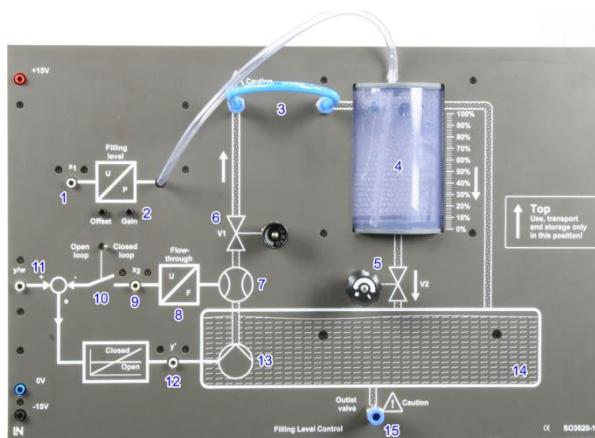
Управлението на нивото на флуид в резервоар е една най-често срещаните задачи в практиката на индустриалните системи за управление. Такива обекти се срещат основно в хранително-вкусовата промишленост, химическата промишленост и др. Поради практическата си значимост системите за управление на нивото на флуид са един от популярните лабораторни физически модели и могат да се намерят в лабораториите по управление на водещите световни университети [1]. Обикновено задачата за управление на нивото на флуида се решава с помощта на ПИД регулатор или неговите модификации. Обаче, в присъствието на значителни по мощност шумове от сензора за ниво, захранването и/или изпълнителния механизъм, стандартният ПИД регулатор не може да осигури ка-

чество на системата за управление в целия работен диапазон. В тези случаи е подходящо да се използват по-сложни алгоритми за управление като линейно-квадратичен регулатор или H_{∞} регулатор. Добри резултати се постигат и чрез комбиниране на различни алгоритми за управление в каскадна схема на управление, което е възможно при наличие на сензор за измерване на дебита на входящия в резервоара флуид. Всичко това мотивира авторите да разработят система за каскадно линейно-квадратично гаусово управление на нивото на флуид в резервоар.

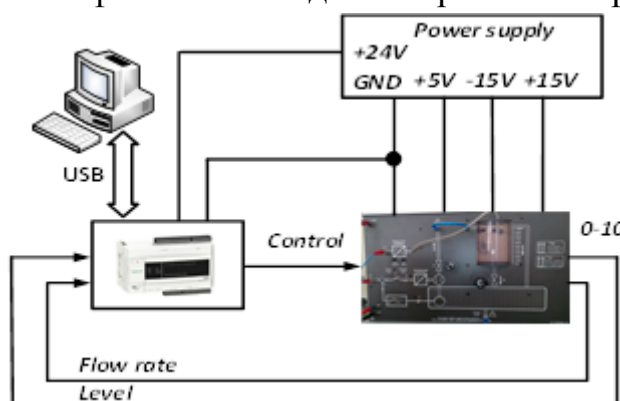
В работата е представена разработената полупромишлена система за каскадно линейно-квадратично гаусово управление на нивото на вода в резервоар. Обект на управление е физически модел на резервоар произведен от фирмата Lucas Nulle [2]. За синтеза на регулаторите в каскадната схема със средствата на идентификацията са разработени два модела от нисък ред. Вътрешният контур на системата осъществява регулиране на дебита на постъпващата в резервоара вода, с помощта на синтезирания ПИ регулатор. Външният контур на управление осъществява управление на нивото на водата в резервоара с помощта на синтезирания линейно-квадратичен регулатор с ПИ филтър на Калман. Разработените регулатори са реализирани в стандартен програмируем логически контролер (PLC) M258 на фирмата Schneider Electric. Представени са резултати както от симулацията на разработената система за управление, така и от реални експерименти с обекта на управление .

2. ХАРДУЕРНА КОНФИГУРАЦИЯ НА СИСТЕМАТА ЗА УПРАВЛЕНИЕ

Обектът за управление е показан на фиг.1. Той се състои от: умален физически модел на промишлен резервоар (4) със скала за нивото на водата в проценти от 0 до 100%; сензор за ниво с преобразувател налягане/напрежение, който дава сигнал в диапазон 0-10V (1); сензор за дебит на входящия в резервоара поток с преобразувател дебит напрежение, който дава сигнал в диапазон 0-10V (9); ръчен входен вентил (6); ръчен изходен вентил (5); голям резервоар (14), който се използва за хранене на малкия резервоар с вода; регулируема помпа (13), изпомпваща водата от големия резервоар (14) към малкия резервоар (4). Помпата се управлява с аналогов сигнал в диапазона 0-10 V. Целта на управлението е нивото на водата в резервоара (4) да се поддържа равно на желаното в целия работен диапазон, въпреки количеството вода, изтичаща през изходящия вентил (5). Регулирането се осъществява посредством промяна на скоростта на въртене на помпата (13). Използва се каскадна схема на управление с обратни връзки по дебит на входящия в резервоара поток и по нивото на водата. Благодарение на стандартните промишлени диапазони на сигналите от сензорите и на управляващата помпа сигнал не е необходимо да се използва допълнителен хардуер за съгласуване на нивата на сигналите в системата за управление. Блок схемата на системата за каскадно управление на нивото на вода е показана на фиг.2. Системата се състои от физически модел на резервоар, от програмируем логически контролер M258 с допълнителни модули 12 битови аналогови входове AI4LE и 16 битови аналогови изходи SAO4L, от операторски панел за човеко машинен интерфейс и от стандартен персонален компютър, чрез който се програмира промишления контролер.



Фиг.1. Умален физически модел на промишлен резервоар.



Фиг.2. Блок схема на системата за управление.

3. КАСКАДЕН ЛИНЕЙНО КВАДРАТИЧЕН ГАУСОВ РЕГУЛЯТОР

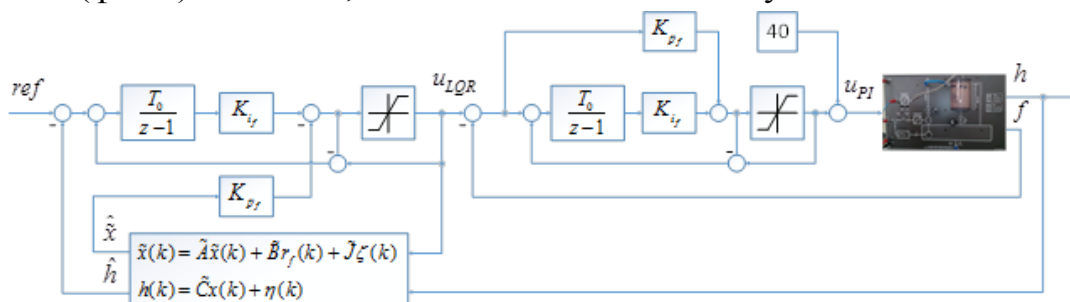
Структурната схема на системата за каскадно управление е показана на фиг.3.

Вътрешен контур по дебит

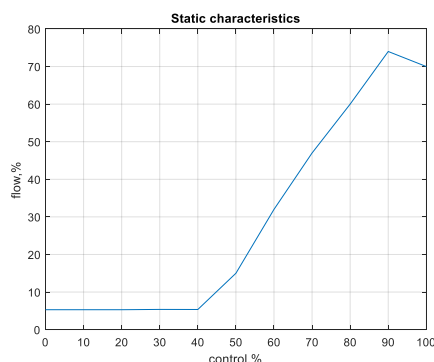
За синтеза на регулатора по дебит на входящия в резервоара поток вода е необходим модел между дебита f [%] и управлението към помпата u [%]. Прието е, че динамиката може да се опише с модел от 1 ред

$$W_f(p) = \frac{k_f}{T_f p + 1}, \quad (1)$$

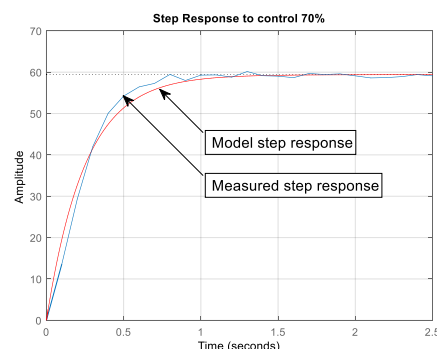
където k_f е коефициент на усилване по дебит и T_f е времеконстанта по дебит. Параметрите на модела (1) се оценяват чрез графо-аналитичен метод, който изисква измерване на преходната функция по дебит. За определяне на амплитудата на стъпалното въздействие е проведен експеримент за снемане на статичната характеристика на помпата (фиг. 4). Вижда се, че помпата има зона на нечувствителност от 40%.



Фиг.3. Структурна схема на системата за каскадно управление.



Фиг.4. Статична характеристика на помпата.



Фиг.5. Преходни функции по дебит и на модела по дебит.

Измерена е преходната функция по дебит при стъпално въздействие с амплитуда 70%. Параметрите на модела (1) са определени от

$$k_f = \frac{\bar{f}}{\bar{u}}, T_f = t_{63,f}, \quad (2)$$

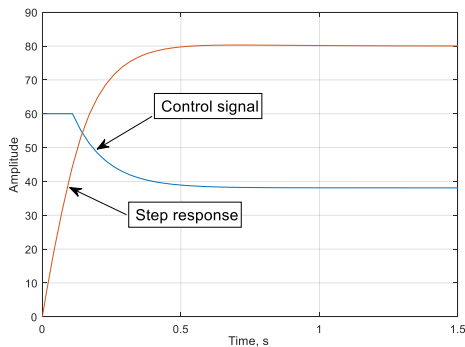
където $\bar{f}$ и $\bar{u}$ са установените стойности на дебита и управляващия сигнал, а $t_{63,f}$ е времето, за което преходната функция достига 63% от установената си стойност. По измерената преходна функция са определени $k_f = 2.1$ и $T_f = 0.25s$. Стойността на коефициента k_f е такава, т.к. амплитудата на стъпалното въздействие след отчитане на зоната на нечувствителност е 30%. За валидиране на модела (1) е извършено сравнение между измерената преходна функция и преходната функция на модела (фиг.5). Вижда се доброто съвпадение между преходните функции, което показва, че моделът (1) може да бъде използван за синтез на регулатор. За регулирането на входящия дебит на водата в резервоара е синтезиран дискретен ПИ регулатор с механизъм за антиинтегрално насищане

$$\begin{aligned} u_c(k) &= K_{p_f} (r_f(k) - f(k)) + K_{i_f} u_{i_f}(k), \\ u_{i_f}(k+1) &= u_{i_f}(k) + T_0 (r_f(k) - f(k)) + v_f(k) - u_c(k), \\ v_f(k) &= \begin{cases} 60, u_c(k) > 60 \\ u_c(k), 0 \leq u_c(k) \leq 60 \\ 0, u_c(k) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

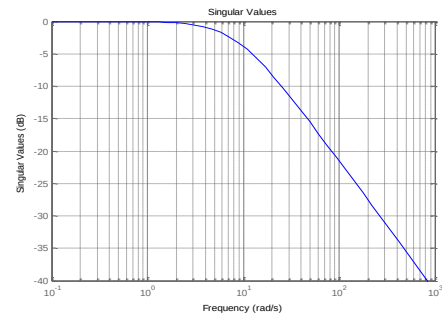
където r_f [%] – заданието по дебит, f [%] – измереният дебит на входния поток вода, u_c [%] – изходният сигнал на ПИ регулатора на дебит, $T_0 = 0.1s$ е такт на дискретизация, $K_{p_f} = 1$ и $K_{i_f} = 4$ са коефициент на пропорционалност и коефициент на интегриране. Те са определени така, че преходният процес по дебит да има апериодичен характер и времето за регулиране да е до 1s. За преодоляване на зоната на нечувствителност на помпата към изходния сигнал на регулатора се добавя константа 40, така управляващият сигнал към помпата се определя от

$$u(k) = u_c(k) + 40. \quad (4)$$

На фиг.6 са представени преходния процес и управляващия сигнал на контура по дебит, а на фиг.7 е показана неговата логаритмично амплитудно честотна характеристика.



Фиг.6. Преходен процес и управляващ сигнал на контура по дебит.



Фиг.7. Честотна характеристика на контура по дебит.

Вижда се, че преходният процес е апериодичен и затихва за 0.6s. Управляващият сигнал има приемлив вид. Честотната лента на контура по дебит е достатъчно широка за да може той да се разглежда като пропорционално звено спрямо външния контур по ниво.

Външен контур по ниво

За синтез на регулатор на нивото на водата е необходим модел между нивото на водата h [%] и дебита f [%]. Прието е, че динамиката може да се опише достатъчно точно с модел от 1 ред

$$W_h(p) = \frac{k_h}{T_h p + 1}, \quad (5)$$

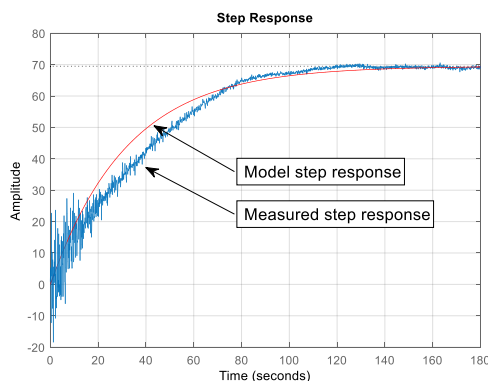
където k_h е коефициент на усилване по ниво и T_h е времеконстанта по ниво. Параметрите на модела (5) се оценяват чрез графо-аналитичен метод. Измерен е преходният процес по ниво при дебит от 80%. Параметрите на модела (5) са определени от

$$k_h = \frac{\bar{h}}{\bar{f}}, T_h = t_{63,h}, \quad (6)$$

където $\bar{h}$ и $\bar{f}$ са установените стойности на нивото и на дебита, а $t_{63,h}$ е времето, за което преходната функция достига 63% от установената си стойност. По измерената преходна функция са определени $k_h = 0.91$ и $T_h = 32$. За валидиране на модела (5) е извършено сравнение между измерената преходна функция и преходната функция на модела (фиг.8).

Вижда се доброто съвпадение между преходните функции, което показва, че моделът (5) е подходящ за синтез на регулатор. За управлението на нивото на водата е синтезиран дискретен линейно-квадратичен гаусов регулатор. Контурът по дебит се апроксимира с пропорционално звено с коефициент на пропорционалност 1, при което за синтеза на линейно-квадратичния гаусов регулатор се използва модела (5), който описва динамиката между измереното ниво на во-

дата в резервоара и заданието към вътрешния контур по дебит r_f .



Фиг.8. Преходни функции по ниво при дебит от 80%.

Той се преобразува в дискретно описание в пространство на състоянието

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k) + Br_f(k) \\ h(k) &= x(k) + \eta(k) \end{aligned}, \quad (7)$$

където $A = e^{-\frac{T_0}{T_h}}$, $B = (e^{-\frac{T_0}{T_h}} - 1)k_h$, а $\eta(k)$ е бял гаусов шум с дисперсия $D_\eta = 2.6$, чрез който се моделира шума от измерването на нивото на водата. За подобряване на точността в установен режим в регулатора се включва интегрална съставка. За целта описанието (7) се разширява с дискретен интегратор

$$x_i(k+1) = x_i(k) + T_0(r_h(k) - h(k)), \quad (8)$$

където $r_h(k)$ е заданието за нивото на водата. След обединяване на (7) и (8) за описанието на разширения обект се получава

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}r_f(k) + \bar{G}r_h(k), \\ y(k) &= \bar{C}\bar{x}(k), \end{aligned}, \quad (9)$$

където $\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -T_0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_0 \end{bmatrix}$ Оптималният линейно квадратичен закон за управление, който минимизира показателя

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{x}^T(k)Q\bar{x}(k) + r_f^T(k)Rr_f(k)] \quad (10)$$

приема вида

$$r_f(k) = -\bar{K}\bar{x}(k), \bar{K} = [K_{p_h} \quad -K_{i_h}], \quad (11)$$

където K_{p_h} и K_{i_h} са параметрите на регулатора, а Q и R са положително определени тегловни матрици. Матрицата на регулатора $\bar{K}$ се определя от израза [3]

$$\bar{K} = (R + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}, \quad (12)$$

където матрицата P е положително определеното решение на уравнението на Рикати

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P - \bar{A}^T P \bar{B} (R + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q = 0. \quad (13)$$

Синтезът на линейно-квадратичния регулатор е извършен за

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, R = 100. \quad (14)$$

Моделът (7) е от първи ред, поради което управлението на нивото на водата в резервоара може да се осъществи само с линейно-квадратичния регулатор без да е необходим синтез на наблюдател на състоянието. Наличието обаче на измервателен шум, който се усилва значително и от обратната връзка може да доведе до повреда в помпата, поради което е необходимо да се извърши филтрация на състоянието и изходния сигнал. За целта се синтезира оптимален стохастичен наблюдател (филтър на Калман). Предполага се, че поради нелинейния характер на обекта, при управление на нивото на водата в целия работен диапазон в линейния модел (5) може да възникнат грешки от немоделирана нискочестотна динамика. Известно е, че линейно-квадратичният регулатор с интегрална съставка сам по себе си е слабо чувствителен към такъв вид грешки, но филтърът на Калман е силно чувствителен към тях, при което биха се получили изместени оценки на състоянието и изходния сигнали. За да се отчете това при синтеза на филтъра на Калман се използва модела

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}r_f(k) + \tilde{J}\zeta(k), \\ h(k) &= \tilde{C}x(k) + \eta(k), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_\zeta \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_\zeta \end{bmatrix}, \tilde{C} = [1 \quad 0]$$

където x_ζ е допълнително състояние, чрез което немоделираната нискочестотна динамика се представя като сигнална неопределеност от тип „случайна разходка“, ζ - представлява дискретен бял гаусов шум с дисперсия $D_\zeta = 1$, а k_ζ - параметър чрез който се отчита честотния диапазон на неопределеността. Оценките на състоянието $\hat{\tilde{x}}$ и оценката на нивото на водата $\hat{h}$ се получават от изразите

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{x}}(k) &= (\tilde{A} - K_f \tilde{C} \tilde{A}) \hat{\tilde{x}}(k-1) + (\tilde{B} - K_f \tilde{C} \tilde{B}) r_f(k-1) + K_f h(k), \\ \hat{h}(k) &= \tilde{C} \hat{\tilde{x}}(k) \end{aligned} \quad (16)$$

където K_f е матричният коефициент на усилване на филтъра на Калман, който се определя от израза

$$K_f = D \tilde{C}^T (\tilde{C} D \tilde{C}^T + D_\eta)^{-1}, D = \tilde{A} D_e \tilde{A}^T + \tilde{J} D_\zeta \tilde{J}^T, \quad (17)$$

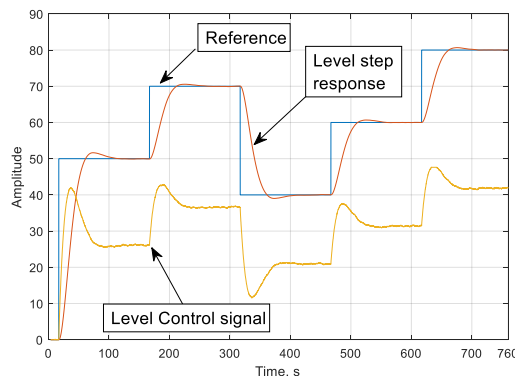
където D_e е положително определеното решение на уравнението

$$D_e = D - D \tilde{C}^T (\tilde{C} D \tilde{C}^T + D_\eta)^{-1} \tilde{C} D. \quad (18)$$

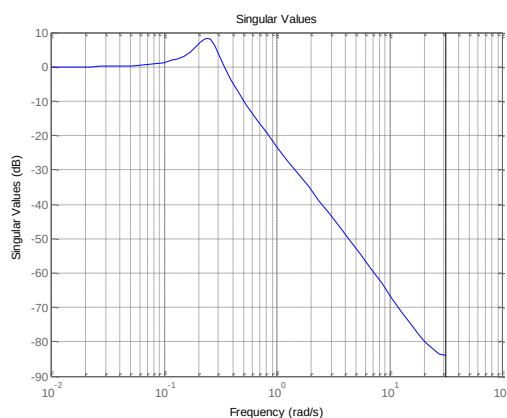
Окончателно оптималното линейно-квадратично гаусово управление се формира съгласно изразите

$$\begin{aligned} r_f(k) &= -K_{p_h} \hat{x}(k) + K_{i_h} \hat{x}_i(k), \\ \hat{x}_i(k+1) &= \hat{x}_i(k) + T_0(r_h(k) - \hat{h}(k)) \end{aligned} \quad (19)$$

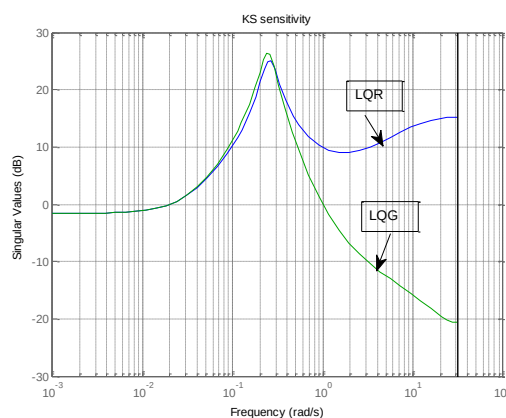
На фиг.9 са показани преходния процес и управляващия сигнал на системата за каскадно управление на нивото на вода. На фиг.10 е показана честотната характеристика на системата по канала ниво задание за ниво, а на фиг.11 е показана чувствителността на управлението към шума в модела за система с линейно-квадратичен регулатор и за такава с линейно-квадратичен гаусов регулатор.



Фиг.9. Преходен процес и управляващ сигнал на системата за каскадно управление на нивото на вода.



Фиг.10. Честотна характеристика на системата за управление на нивото на водата.



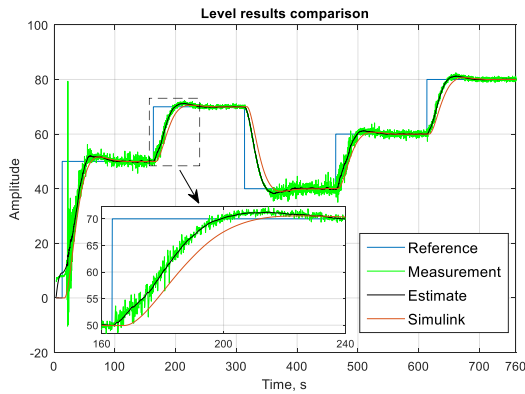
Фиг.11. Чувствителност на управляващия сигнал към измервателния шум за системата с LQR и LQG регулатори.

Вижда се, че преходните процеси затихват за около 50 s, докато преходния процес на обекта за управление е около 150 s.. Пререгулирането е незначително. От фиг.11 се вижда ползата от използването на филтъра на Калман, с който се понижава чувствителността на управляващия сигнал към измервателния шум, което ще подобри работата на помпата .

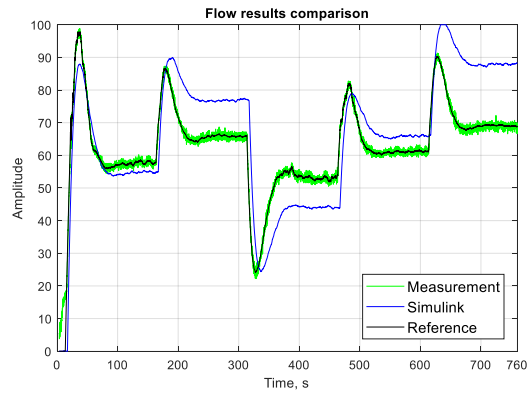
4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ РЕЗУЛТАТИ

Разработените алгоритми за каскадно линейно-квадратично гаусово управление са реализирани в *PLC M258* на фирма *Schneider Electric*. За разработването на софтуера е използван езика от високо ниво *Structured Text(ST)*. Проведени са редица експерименти със системата за управление, като са представени резултати от експеримент при който заданието се променя съгласно

$$r = \begin{cases} 50\%, 10 \leq t < 160 \\ 70\%, 160 \leq t < 310 \\ 40\%, 310 \leq t < 460 \\ 60\%, 460 \leq t < 610 \\ 80\%, 610 \leq t < 760 \end{cases} \quad (20)$$

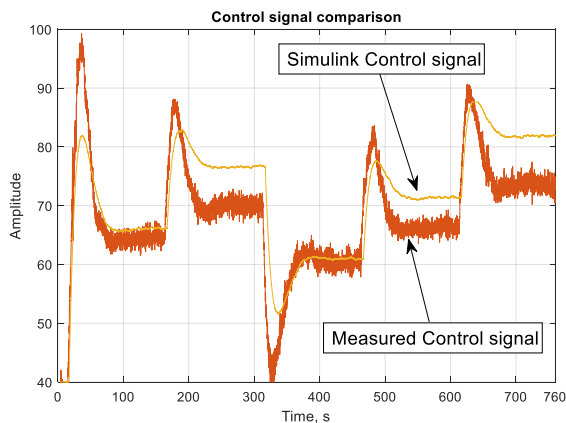


Фиг.12. Преходни процеси по ниво.

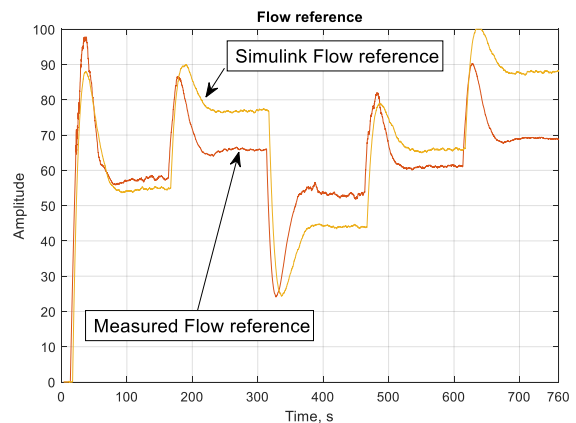


Фиг.13. Преходни процеси по дебит.

На фиг.12 са показани заданието по ниво, нивото на водата от симулацията в Simulink, измереното и оцененото с ПИ филтъра на Калман нива от реалния експеримент. На фиг.13 са показани преходните процеси по дебит от симулацията и от експеримента и заданието по-дебит (изхода на LQG регулатора) от експеримента. Получено е много доброто съвпадение между нивата на водата от симулацията и от експеримента. Освен това получената оценка на нивото е неизместена и достатъчно гладка. От фиг.13 се вижда, че контура по дебит има отлични следящи свойства. На фиг.14 е показан управляващия сигнал от симулацията и експеримента, а на фиг.15 са показани изходните сигнали на LQG от експеримента и симулацията. Управлението от експеримента е достатъчно гладко, което се дължи на синтезирания филтър на Калман. Разликата между установените стойности на управлението от симулацията и от експеримента се дължат на грешката която възниква в линейния модел при значителни отклонения от работната точка, за която той е оценен (вижда се, че грешката е незначителна при управление от 65%). Тези грешки не оказват влияние върху качеството на управление на системата поради отчитането им чрез сигнална неопределеност в модела (15).



Фиг.14. Управляващи сигнали.



Фиг.15. Задание по дебит.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работата е представена разработената система за каскадно линейно-квадратично гаусово управление на нивото на вода в резервоар. За синтеза на регулаторите в каскадната схема със средствата на идентификацията са разработени модели от нисък ред. Вътрешният контур на системата осъществява регулиране на дебита на водата, постъпваща в резервоара с ПИ регулатор. Външният контур осъществява управление на нивото на водата в резервоара с помощта на линейно-квадратичен регулатор с ПИ филтър на Калман. Разработените регулатори са реализирани в стандартен програмируем логически контролер (PLC) M258 на фирмата Schneider Electric. Представените резултати показват качеството на управление на разработената система за целия работен диапазон.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Slavov Ts., T. Puleva. *Multitank System Water Level Control Based on Pole Placement Controller and Adaptive Disturbance Rejection*. Preprints of the IFAC Workshop Dynamics and Control in Agriculture and Food Processing p.219-224, Bulgaria, 2012. ISBN: 978-954-9641-54-7
- [2] Lucas Nülle GmbH, Kerpen-Sindorf, Germany. *Compact Level Control Kit Including Vessel, Tank, Pump and Sensors*, 2017. [Online]. Available at: <https://www.lucas-nuelle.com/317/pid/6708/apg/3353/Compact-level-control-kit-including-vessel,-tank,-pump-and-sensors-.html>.
- [3]. Petkov P., Slavov T., Kralev J. (2018), *Design of Embedded Robust Control Systems using MATLAB®/Simulink®*, IET Control, Robotics and Sensor Series 113.IET, London. ISBN 978-1-78561-3330-2

Автори: Цоньо Славов, доц. д-р, катедра „Системи и управление“, Факултет Автоматика, Технически Университет-София, E-mail address: ts_slavov@tu-sofia.bg, Мирослава Барахарска, бак. инж., катедра „Системи и управление“, Факултет Автоматика, Технически Университет-София, E-mail address: mbaraharska@gmail.com

Постъпила на 29.10.2018 г.

Рецензент: доц. д-р Теофана Пулева

ТОЧНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ОСОБЕНОСТИТЕ НА РЕШЕНИЯТА НА ЕДНА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ЗА ЧЕТИРИМЕРНОТО ВЪЛНОВО УРАВНЕНИЕ

Алексей Николов

Резюме: През 1954 година Протър е предложил многомерни аналози на известни двумерни задачи от околзвуквата газова динамика. Тук е разглеждана една от задачите на Протър, формулирани за вълновото уравнение в $\mathbb{R}^4$. Оказва се, че задачите на Протър не са коректни в смисъл на класическа разрешимост, но вместо това притежават обобщени решения, дефинирани в подходящ клас от функции. Тези обобщени решения в общия случай имат силни особености от степенен вид. За разглежданата задача е направено математическо описание на асимптотичното поведение на особените решения, но то съдържа функции, които не са дадени в явен вид. В настоящата работа е даден точният израз на тези функции.

Ключови думи: вълново уравнение, гранични задачи, обобщени решения, разпространение на особености.

EXACT REPRESENTATION OF THE SINGULARITIES OF THE SOLUTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FOUR-DIMENSIONAL WAVE EQUATION

Aleksey Nikolov

Abstract: In 1954 Protter proposed multidimensional analogues of famous planar problems arising in transonic fluid dynamics. Here one of the Protter problems, formulated for the wave equation in $\mathbb{R}^4$, is considered. It turns out that the Protter problems are not well-posed in the frame of classical solvability, but instead of this they have generalized solutions defined in a proper function's space. These generalized solutions in the general case have strong power-type singularities. For the considered problem a mathematical description of the asymptotic behavior of the singular solutions is known, however it involves functions, which are not given explicitly. In the present work we give the exact representation of these functions.

Keywords: wave equation, boundary value problems, generalized solutions, propagation of singularities.

1. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

Дадено е нехомогенното вълново уравнение

$$L_0[u] \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - u_{tt} = f(x, t) \quad (1.1)$$

в областта

$$\Omega_0 := \{(x, t) : 0 < t < 1/2, t < |x| < 1 - t\},$$

където за означаване на точките в $\mathbb{R}^4$ сме използвали $(x, t) := (x_1, x_2, x_3, t)$ и съответно $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Областта Ω_0 е ограничена от кълбото

$$\Sigma_0 := \{(x, t) : t = 0, |x| < 1\},$$

а също така и от характеристичните повърхнини на уравнение (1.1)

$$\Sigma_1^0 := \{(x, t) : 0 < t < 1/2, |x| = 1 - t\},$$

$$\Sigma_2^0 := \{(x, t) : 0 < t < 1/2, |x| = t\}.$$

Ще разгледаме една гранична задача за уравнение (1.1), в която граничните условия са поставени по нестандартен начин, получавайки по този начин многомерен аналог на задачата на Дарбу:

Задача P_0 . *Да се намери решение на уравнение (1.1) в Ω_0 , което удовлетворява хомогенните граничните условия на Дирихле*

$$u|_{\Sigma_1^0} = 0, \quad u|_{\Sigma_0} = 0.$$

Ще формулираме и спрегнатата задача на P_0 :

Задача P_0^* . *Да се намери решение на самоспрегнатото уравнение (1.1) в Ω_0 , което удовлетворява граничните условия*

$$u|_{\Sigma_2^0} = 0, \quad u|_{\Sigma_0} = 0.$$

Задача P_0 е била предложена от М. Протър [15, 16], когато е изследвал многомерни варианти на известната задача на Guderley-Morawetz за уравнения от смесен тип, ограничавайки разглежданията си само в хиперболичната част на зададената област. Задачата на Guderley-Morawetz от своя страна представлява двумерен модел на околосвуково течение около крило на самолет. Протър е формулирал подобни задачи и за слабо хиперболични уравнения, израждащи се на границата Σ_0 .

За разлика от двумерните задачи на Дарбу обаче задачите на Протър не са коректно поставени от гледна точка на класическата разрешимост. Работата е там, че техните хомогенни спрегнати задачи (в това число и Задача

P_0^* с дясна страна $f(x, t) \equiv 0$) притежават безброй много линейно независими класически решения ([17, 13, 3]). А това означава, че за съществуване на класическо решение при задачите на Протър е необходимо да са изпълнени безброй много условия, което по-нататък ще поясним малко по-подробно. По тази причина Попиванов и Шнайдер [13, 14] въвеждат обобщени решения на тези задачи, за които доказват резултати за съществуване и единственост. Днес е добре известно, че ако не са изпълнени специални условия, тези обобщени решения имат силни особености от степенен вид. Интересното е, че тези особености са изолирани в една единствена точка на границата на областта и не се разпространяват по бихарактеристиките, както е типично за хиперболичните уравнения.

2. ИЗВЕСТНИ РЕЗУЛТАТИ ПО РАЗГЛЕЖДАНАТА ЗАДАЧА

Първо ще изложим известните резултати ([10, 11]) по разглежданата задача, които в настоящата работа ще допълним.

Както споменахме вече, хомогенната спрегната Задача P_0^* притежава безброй много линейно независими класически решения.

По-точно, нека за $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ да въведем функциите

$$H_k^n(|x|, t) := \frac{t(|x|^2 - t^2)^{n-2k-1}}{|x|^{n-2k+1}} {}_2F_1\left(n - k + \frac{1}{2}, -k, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{|x|^2}\right), \quad (2.1)$$

където ${}_2F_1(a, b, c; z)$ е хипергеометричната функция на Гаус.

Освен това нека означим с $Y_n^s(x)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s = 1, 2, \dots, 2n + 1$ тримерните сферични функции. Обичайно те са дефинирани върху единичната сфера $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, но за удобство ние ще ги продължим извън S^2 радиално, запазвайки същото означение за продължените функции:

$$Y_n^s(x) := Y_n^s(x/|x|), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

И, накрая, нека означим с O началото на координатната система в $\mathbb{R}^4$. Тогава можем да цитираме следната лема:

Lemma 2.1. ([10]) *За $k = 0, \dots, [n/2] - 2$ и $s = 1, 2, \dots, 2n + 1$ функциите*

$$v_{k,s}^n(x, t) := \begin{cases} H_k^n(|x|, t) Y_n^s(x), & (x, t) \neq O, \\ 0, & (x, t) = O \end{cases} \quad (2.2)$$

са класически решения на хомогенната Задача P_0^ .*

Не е трудно да се провери, че необходимо условие за съществуване на класическо решение на Задача P_0 е ортогоналността на дясната страна $f(x, t)$ на

всички тези функции $v_{k,s}^n(x, t)$. Действително:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} v_{k,s}^n(x, t) f(x, t) dx dt &= \int_{\Omega_m} v_{k,s}^n(x, t) L_0[u](x, t) dx dt \\ &= \int_{\Omega_m} L_0[v_{k,s}^n](x, t) u(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

С други думи, трябва да бъдат изпълнени безброй много ортогонални условия от вида $\mu_{k,s}^n = 0$, където $\mu_{k,s}^n$ са скаларните произведения

$$\mu_{k,s}^n := \int_{\Omega_0} v_{k,s}^n(x, t) f(x, t) dx dt. \quad (2.3)$$

При тази ситуация е целесъобразно да се дефинира *обобщено решение* на Задача P_0 :

Definition 2.1. ([11]) Функцията $u = u(x, t)$ се нарича *обобщено решение* на Задача P_0 в Ω_0 , ако:

- (1) $u \in C^1(\bar{\Omega}_0 \setminus O)$, $u|_{\Sigma_1^0} = 0$, $u|_{\Sigma_0 \setminus O} = 0$;
- (2) интегралното тъждество

$$\int_{\Omega_0} (u_t v_t - u_{x_1} v_{x_1} - u_{x_2} v_{x_2} - u_{x_3} v_{x_3} - f v) dx dt = 0$$

е изпълнено за всички тестови функции v от множеството

$$V_0 := \{v \in C^1(\bar{\Omega}_0) : v|_{\Sigma_0} = 0, v \equiv 0 \text{ в околност на } \Sigma_2^0\}.$$

Тази дефиниция допуска обобщеното решение да има силна особеност в началото O , която, както ще видим, в общия случай действително съществува.

За така дефинираното обобщено решение е получена следната теорема за съществуване и единственост:

Theorem 2.1. ([11]) Задача P_0 притежава най-много едно обобщено решение в Ω_0 . Освен това, нека дясната страна на (1.1) принадлежи на $C^1(\bar{\Omega}_0)$ и е от вида

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^l \sum_{s=1}^{2n+1} f_n^s(|x|, t) Y_n^s(x), \quad (2.4)$$

където $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогава съществува единствено обобщено решение на Задача P_0 в Ω_0 и то е от вида

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^l \sum_{s=1}^{2n+1} u_n^s(|x|, t) Y_n^s(x).$$

Частният случай, когато дясната страна $f(x, t)$ е от вида (2.4) всъщност е важен, доколкото сферичните функции образуват пълна ортогонална система в $L_2(S^2)$, т.е. можем да тълкуваме $f(x, t)$ като частична сума от ред на Фурие.

Следващият резултат описва асимптотичното поведение на обобщените решения, които имат особености в началото O :

Theorem 2.2. ([11]) *Нека дясната страна $f \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ е от вида (2.4). Тогава единственото обобщено решение $u(x, t)$ на Задача P_0 принадлежи на $C^2(\bar{\Omega}_0 \setminus O)$ и има следното асимптотично представяне в околност на особената точка O :*

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^l |x|^{-p} F_p(x, t) + F(x, t), \quad (2.5)$$

където:

(1) функцията $F \in C^2(\bar{\Omega}_0 \setminus O)$ и удовлетворява априорната оценка

$$|F(x, t)| \leq C \|f\|_{C^1(\Omega_0)}, \quad (x, t) \in \Omega_0 \quad (2.6)$$

с константа C , независеща от f и $\|f\|_{C^1(\Omega_0)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} |\max_{\bar{\Omega}_0} D^\alpha f(x, t)|$;

(2) функциите F_p , $p = 1, \dots, l$ се представят чрез равенствата

$$F_p(x, t) = \sum_{k=0}^{[(l-p)/2]} \sum_{s=1}^{2p+4k+1} \mu_{k,s}^{p+2k} F_{k,s}^{p+2k}(x, t), \quad (2.7)$$

където $F_{k,s}^n \in C^2(\bar{\Omega}_0 \setminus O)$ са ограничени и независещи от f функции;

(3) ако поне една от константите $\mu_{k,s}^{p+2k}$ в представянето (2.7) е различна от нула, тогава за съответната функция $F_p(x, t)$ съществува такъв единичен вектор $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, че¹

$$\lim_{t \rightarrow +0} F_p(\alpha t, t) = \text{const} \neq 0.$$

Това означава, че в този случай редът на степенната особеност на $u(x, t)$ ще бъде не по-малка от p .

Според тази теорема редът на степенната особеност на $u(x, t)$ може да се фиксира точно чрез коефициентите (2.3), т.е. избирайки дясната страна $f(x, t)$ да е ортогонална на съответните функции $v_{k,s}^n(x, t)$ от Лема 2.1. Действително, ограничено решение без особеност в т. O е налице само в специалния случай, когато всички коефициенти $\mu_{k,s}^{p+2k}$, $p = 1, \dots, l$ в представянето (2.7) са равни на нула, което съответства и на факта, че необходимо (но не достатъчно) условие за класическа разрешимост на Задача P_0 е ортогоналността на $f(x, t)$ на всички класически решения на хомогенната спрегната Задача P_0^* .

¹При $0 < t < 1/2$ точките $(x, t) = (\alpha t, t)$ образуват “пътечка” върху повърхността Σ_2^0 към т. O .

Ситуацията тук е твърде нетипична за задачите за вълновото уравнение: особеностите на решението не могат да се отстранят с повишаване на гладкостта на дясната страна $f(x, t)$ (а само с удовлетворяване на ортогонални условия), а също така, тези особености не се разпространяват по бихарактеристиките на уравнението.

3. НОВИ РЕЗУЛТАТИ

Тук ще представим някои нови резултати, които дават по-точна формулировка на гореизложените.

Theorem 3.1. *Теорема 2.1 за съществуване и единственост на обобщено решение, както и Теорема 2.2 за асимптотичното представяне на това решение, са в сила и при изпълнение на по-слабото условие $f \in C(\bar{\Omega}_0)$ вместо $f \in C^1(\bar{\Omega}_0)$.*

В Теорема 2.2 функциите $F(x, t)$, $F_{k,s}^n(x, t)$ (съответно и $F_p(x, t)$) не са дадени в явен вид, но последните ни резултати дават тяхната точна форма.

За “ограничения остатък” $F(x, t)$ във формула (2.5) се получава твърде дълъг израз, който няма да приведем тук, но вместо (2.6) можем да дадем малко по-добра оценка:

$$|F(x, t)| \leq C \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}_0} |f(x, t)|, \quad (x, t) \in \Omega_0.$$

За функциите $F_{k,s}^n(x, t)$ получаваме сравнително проста форма:

Theorem 3.2. *Точният израз на функциите $F_{k,s}^n(x, t)$ в представянето (2.7) се дава със следната формула:*

$$\begin{aligned} F_{k,s}^n(x, t) &= c_k^n \frac{t}{|x|} {}_2F_1 \left(n - k + \frac{1}{2}, -k, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{|x|^2} \right) Y_n^s(x) \\ &= c_k^n \frac{|x|^{n-2k}}{(|x|^2 - t^2)^{n-2k-1}} v_{k,s}^n(x, t), \end{aligned}$$

където $v_{k,s}^n(x, t)$ са функциите от Лема 2.1 и

$$c_k^n := \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-2k-1}} \frac{(n+1)_{n-2k-1} (-n)_{n-2k-1}}{(n-2k-1)! (n-2k-1)!} = \text{const} \neq 0.$$

Забележка: Може да се провери, че функциите $|x|^{-p} F_{k,s}^{p+2k}(x, t)$ са решения на хомогенното уравнение (1.1). Следователно във формула (2.5) “сингулярната част” $u_0(x, t) := u(x, t) - F(x, t)$ е решение на хомогенното уравнение $L_0[u_0] = 0$, а “ограничения остатък” $F(x, t)$ решава нехомогенното уравнение $L_0[F] = f(x, t)$.

- [1] Choi J., Park J. (2012), *On the conjugate Darboux-Protter problems for the two dimensional wave equations in the special case*, J. Korean Math. Soc., 39, No 5, 681-692.
- [2] Garabedian P. (1960), *Partial differential equations with more than two variables in the complex domain*, J. Math. Mech., 9, 241-271.
- [3] Khe Kan Cher (1998), *On nontrivial solutions of some homogeneous boundary value problems for the multidimensional hyperbolic Euler-Poisson-Darboux equation in an unbounded domain*, Differ. Equations, 34, No 1, 139-142.
- [4] Nikolov A. (2014), *Integral representation of singular solutions to BVP for the wave equation*, AIP Conf. Proc., 1637, 1249-1253.
- [5] Nikolov A. (2017), *New Representation Formula for the Solution of a Darboux-Goursat Problem*, AIP Conf. Proc., 1910, 0400121-0400124.
- [6] Nikolov A., Popivanov N. (2012), *Exact behavior of singular solutions to Protter's problem with lower order terms*, Electron. J. Diff. Equ., 2012, No 149, 1-20.
- [7] Nikolov A., Popivanov N. (2014), *Riemann-Hadamard function for Darboux-Goursat problem and its multidimensional application*, AIP Conf. Proc., 1631, 175-180.
- [8] Popivanov N., Hristov T., Nikolov A., Schneider M. (2017), *Singular Solutions to a (3+1)-D Protter-Morawetz Problem for Keldysh-Type Equations*, Adv. Math. Phys., ID 1571959, 1-16.
- [9] Popivanov N., Popov T. (2002), *Exact behavior of the singularities for the 3-D Protter's problem for the wave equation*, Inclusion Methods for Nonlinear Problems with Applications in Engineering, Economics and Physics, Computing, (ed. J. Herzberger), [Suppl] 16, 213-236.
- [10] Popivanov N., Popov T. (2004), *Singular solutions of Protter's problem for the (3+1)-D wave equation*, Integral Transforms Spec. Funct., 15, No 1, 73-91.
- [11] Popivanov N., Popov T., Scherer R. (2007), *Asymptotic expansions of singular solutions for (3+1)-D Protter problems*, J. Math. Anal Appl., 331, No 2, 1093-1112.
- [12] Popivanov N., Popov T., Tesdall A. (2014), *Semi-Fredholm solvability in the framework of singular solutions for the (3+1)-D Protter-Morawetz problem*, Abstr. Appl. Anal., 2014, 1-19.
- [13] Popivanov N., Schneider M. (1993), *The Darboux problems in $\mathbf{R}^3$ for a class of degenerating hyperbolic equations*, J. Math. Anal Appl., 175, No 2, 537-579.

- [14] Popivanov N., Schneider M. (1995), *On M. H. Protter problems for the wave equation in $\mathbf{R}^3$* , J. Math. Anal. Appl., 194, No 1, 50-77.
- [15] Protter M. (1954), *A boundary value problem for the wave equation and mean value problems*, Annals of Math. Studies, 33, 247-257.
- [16] Protter M. (1954), *New boundary value problem for the wave equation and equations of mixed type*, J. Rat. Mech. Anal., 3, 435-446.
- [17] Tong Kwang-Chang (1957), *On a boundary value problem for the wave equation*, Science Record, New Series, 1, 1-3.

Автор: Алексей Николов, гл. ас. д-р, катедра „Математически анализ и диференциални уравнения, Факултет по Приложна Математика и Информатика, Технически университет-София, E-mail address: ajn@tu-sofia.bg

Постъпила на 29.10.2018 г.

Рецензент: проф. д-р Георги Венков